LIMITES DE FONCTIONS

I. Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite finie à l'infini

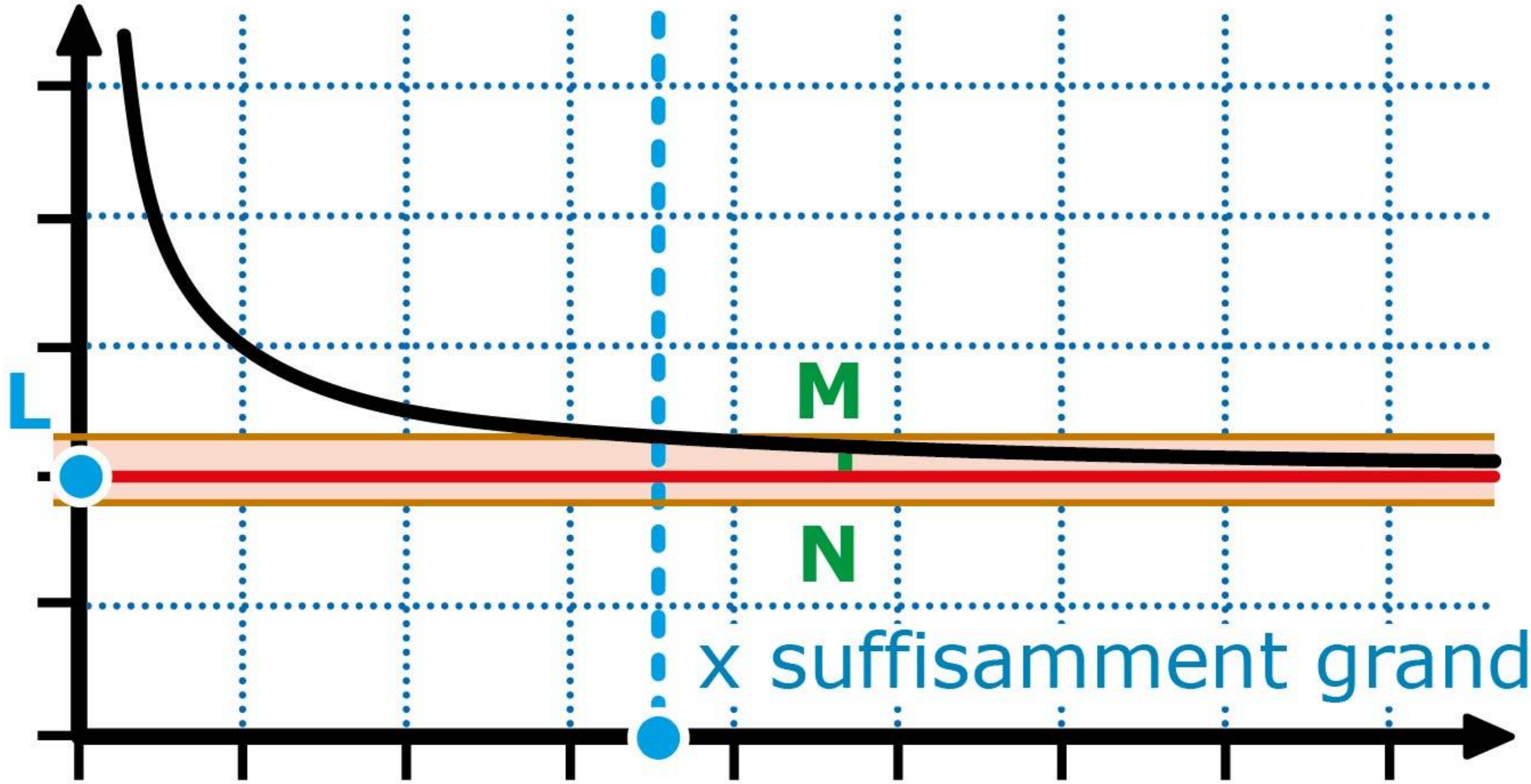
Intuitivement :

On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :

La fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.


L
M
N
x suffisamment grand

Définition :

On dit que la fonction f **admet pour limite L en** $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Définitions :

— La droite d'équation $y = L$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

— La droite d'équation $y = L$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f

en $-\infty$ si

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Remarque :

Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote. La distance MN tend vers 0.

2) Limite infinie à l'infini

Intuitivement :

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l’on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple : La fonction définie par

$f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend

vers $+\infty$.

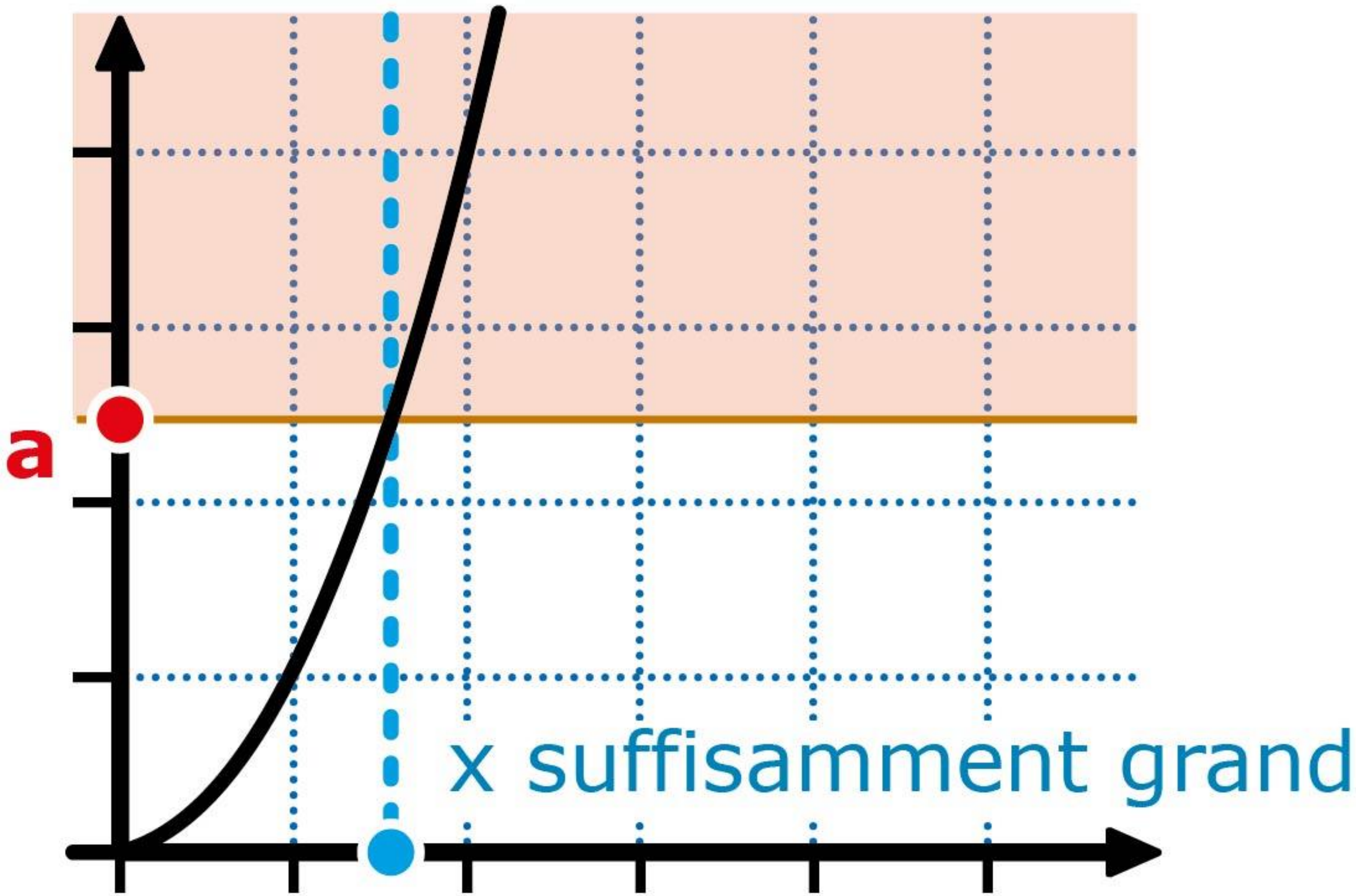
En effet, les valeurs de la fonction

deviennent aussi grandes que l'on souhaite

dès que x est suffisamment grand.

Si on prend un réel a quelconque,

l'intervalle $]\,a; +\infty\,[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment grand.


a
x suffisamment grand

Définitions : — On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]\,a;+\infty\,[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f\,(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :

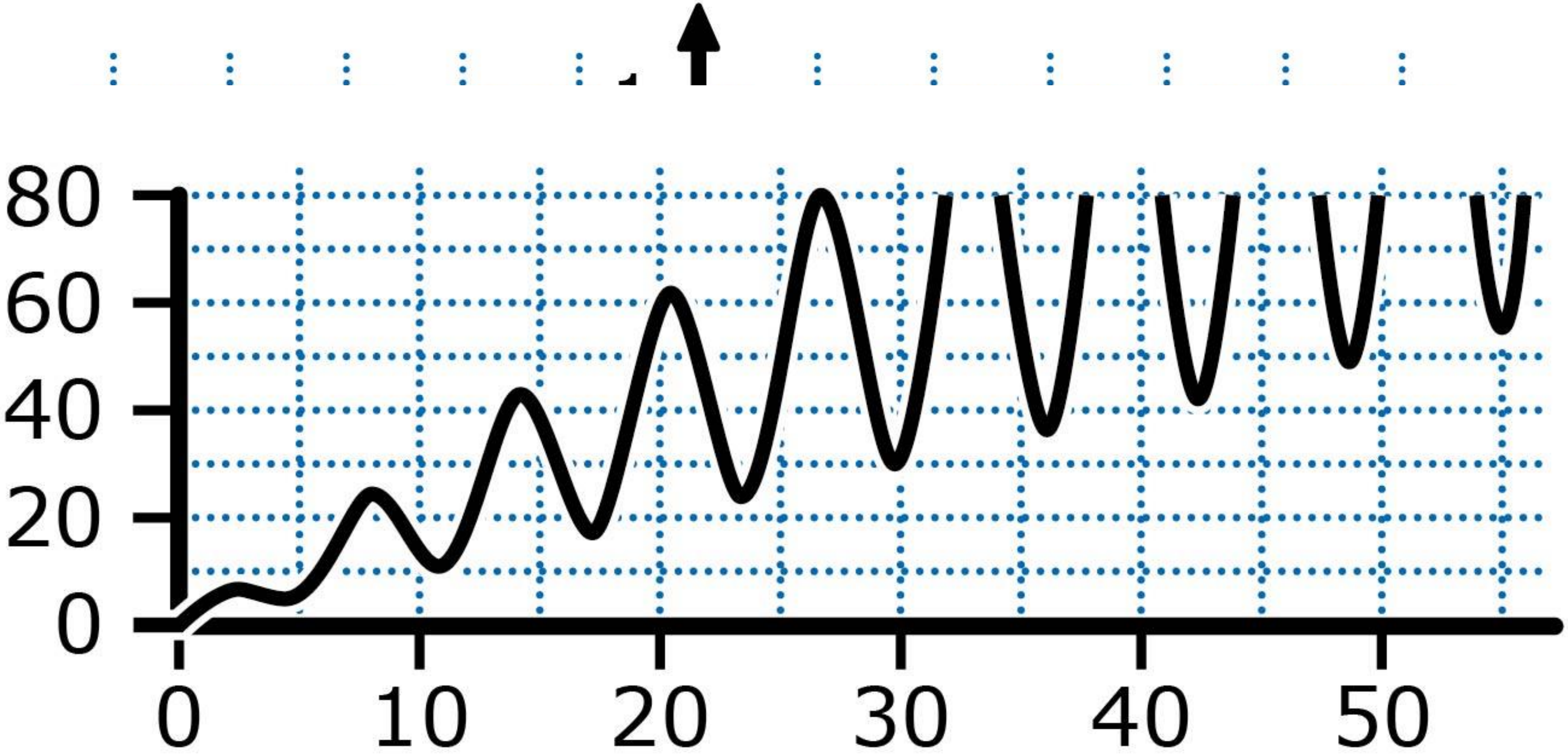
$$\lim_{x \to +\infty} f\,(x) = +\infty$$

— On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty; b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

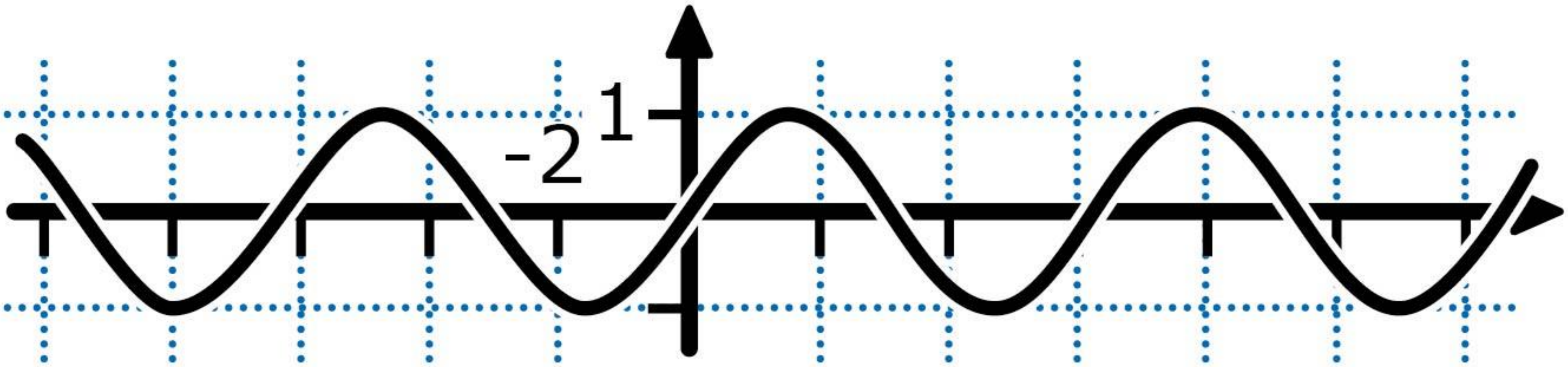
Remarques :

— Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.



80
60
40
20
0
0
10
20
30
40
50

— Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



3) Limites des fonctions usuelles

Propriétés :

– $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$,

$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

– $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

– $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

II. Limite d'une fonction en un réel A

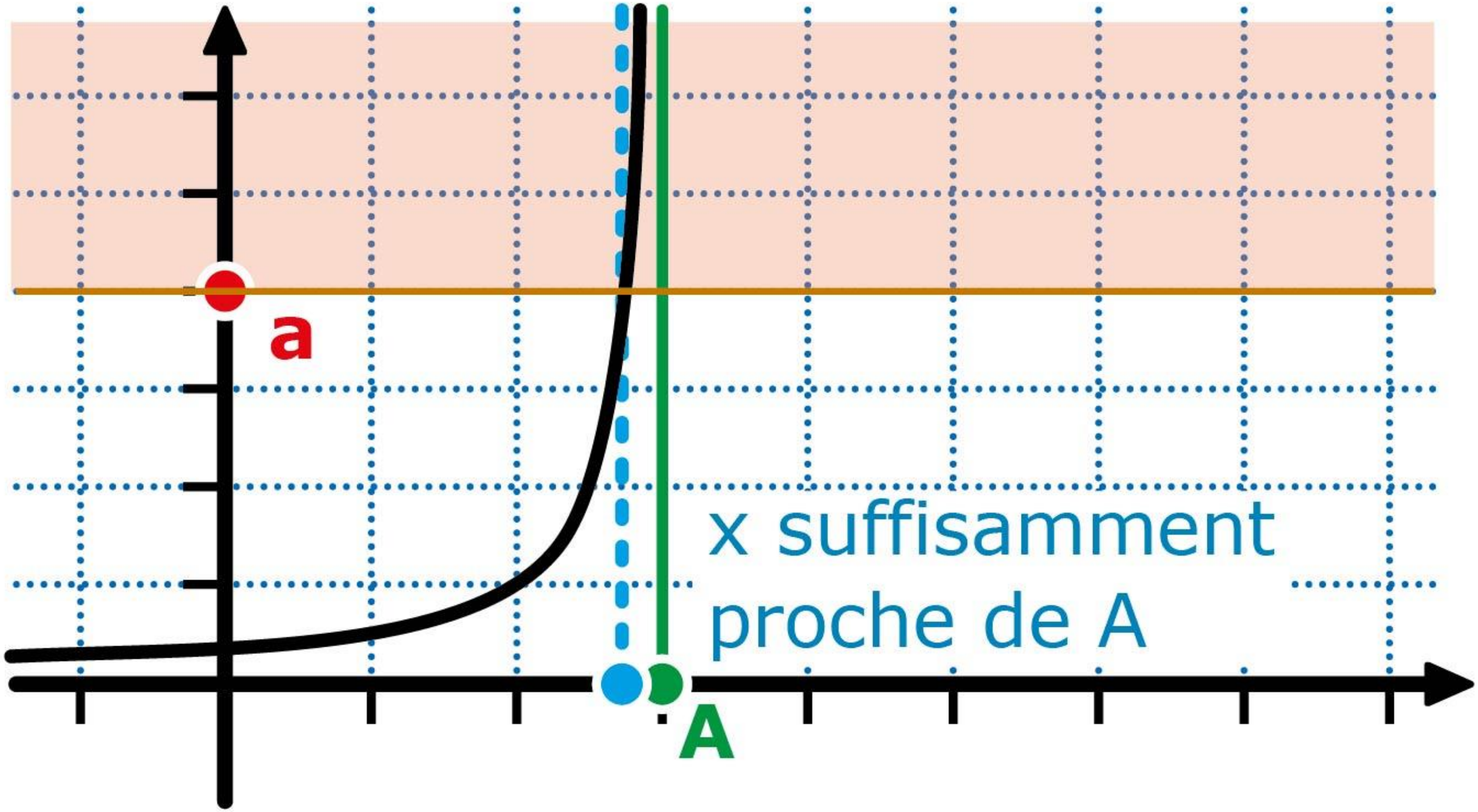
Intuitivement :

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A.

Exemple : La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers A.

En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de A.

Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]\,a; +\infty\,[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de A.


a
x suffisamment
proche de A
A

Définitions :

— On dit que la fonction f **admet pour limite** $+\infty$ **en** $\boldsymbol{A}$ si tout intervalle $]\,a; +\infty\,[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f\,(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$

— On dit que la fonction f **admet pour limite** $-\infty$ **en** A si tout intervalle $]-\infty; b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$

— La droite d'équation $x = A$ est **asymptote** à la courbe représentative de la fonction f si $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$.

Remarque :

Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon $x > A$ ou $x < A$.

Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

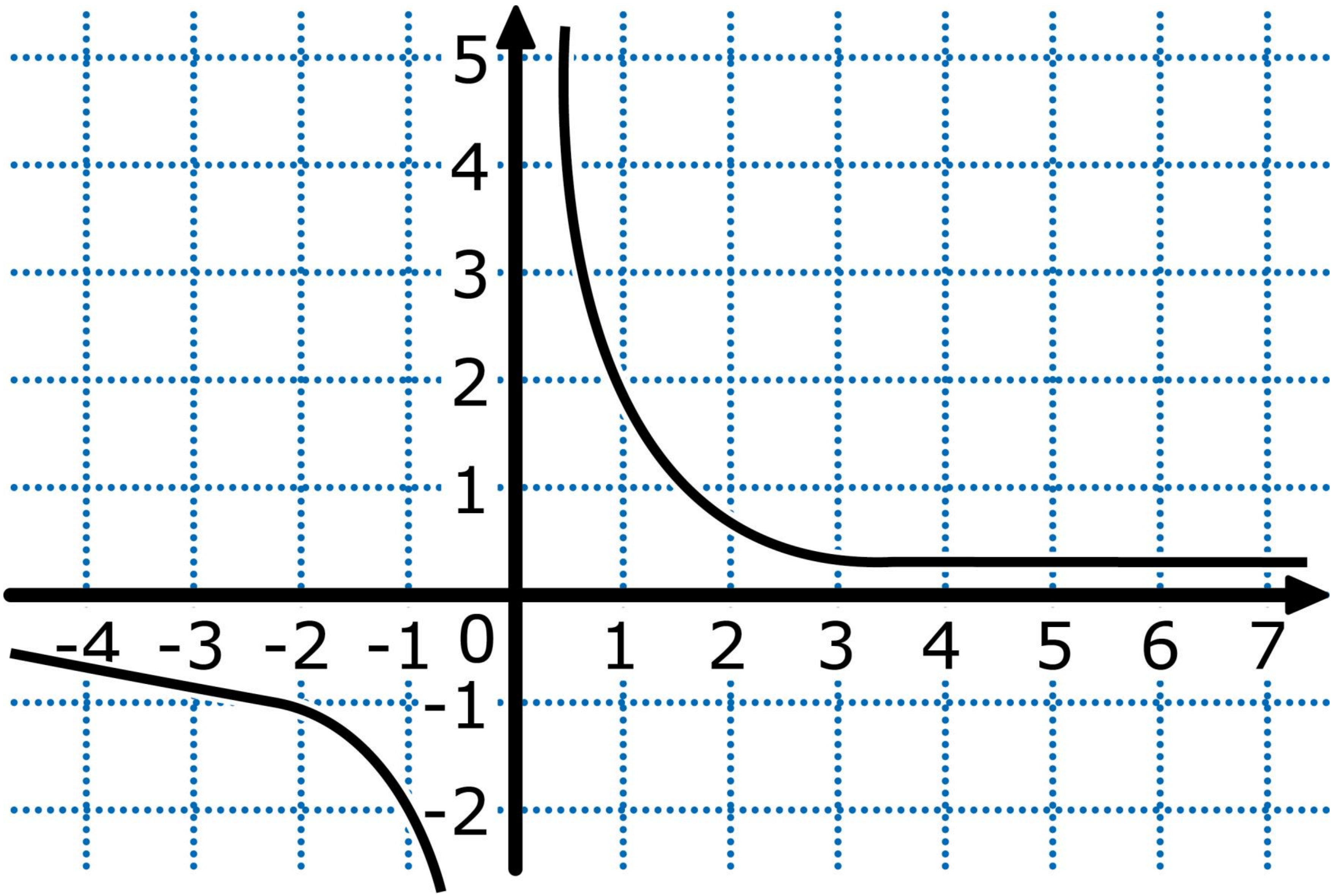
- Si $x < 0$, alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$$

- Si $x > 0$, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

On parle de limite à gauche de 0 et de limite à droite de 0.


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-4 -3 -2 -1
1 2 3 4 5 6 7

III. Opérations sur les limites.

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)+g(x)) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

2) Limite d'un produit

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x)g(x)) =$	$L\,L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**0**
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ **ou** $-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha}(f(x)g(x)) =$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	$L > 0$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x) > 0$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$	0 avec $g(x) < 0$
$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	0	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$
$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	**F.I.**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	**F.I.**

Exemple :

$$\lim_{x \to -\infty} (x-5)(3+x^2) \text{ ?}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x-5) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} (3+x^2) = +\infty$$

D'après la règle sur la limite d'un produit :

$$\lim_{x \to -\infty} (x-5)(3+x^2) = -\infty$$

Remarque :

Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty - \infty", \ "0 \times \infty", \ "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}".$$

Exercice 1 : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles

Calculer :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1}$

Exercice 2: Lever une forme indéterminée sur les fonctions avec des radicaux

Calculer :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

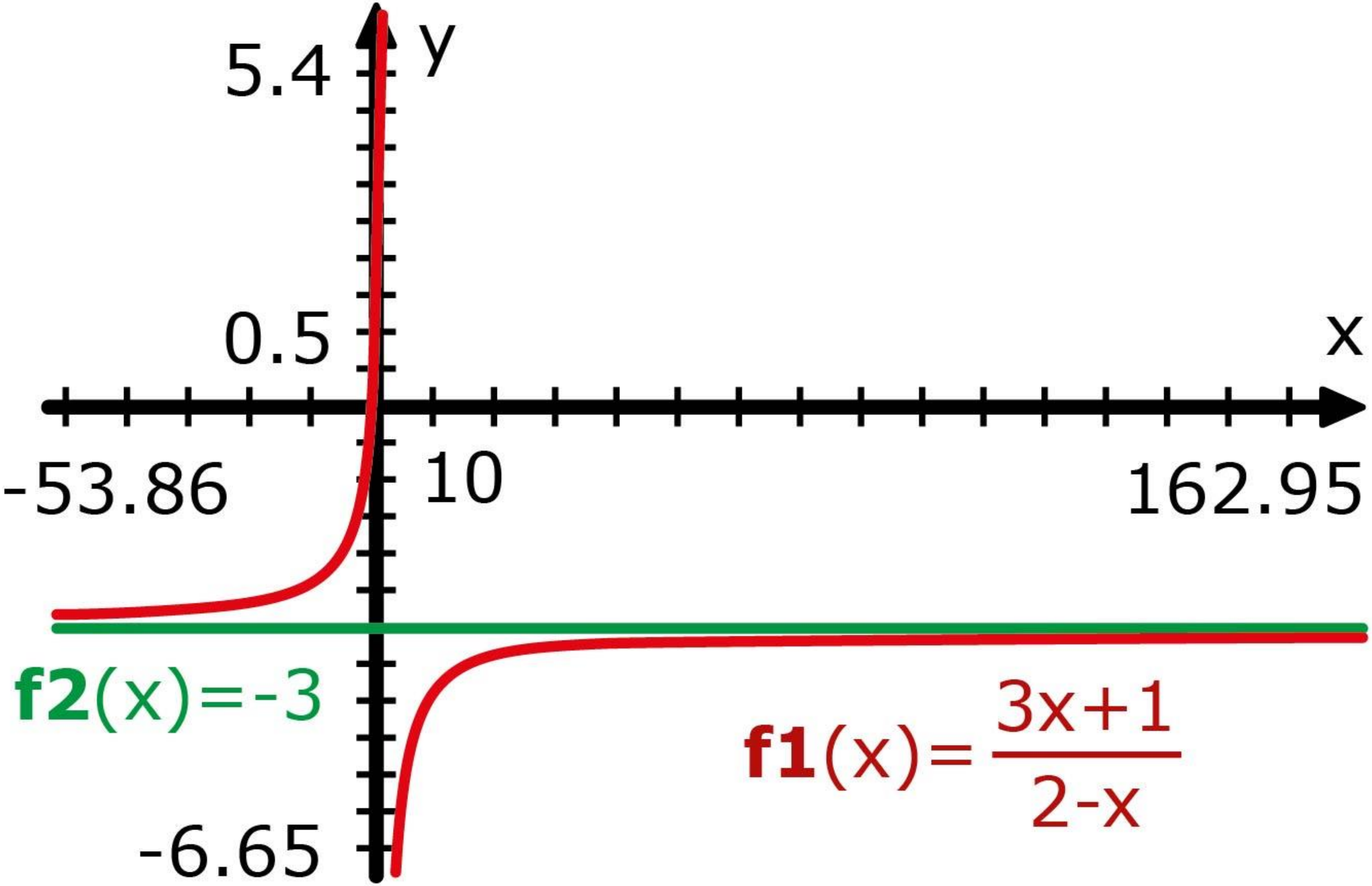
2) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

Exercice 3 : Déterminer une asymptote

1) Soit f la fonction définie sur

$]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ Par $f(x)=\frac{3x+1}{2-x}$.

Démontrer que la droite d'équation $y=-3$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.


y
5.4
0.5
x
-53.86
10
162.95
-6.65
f2(x)=-3
f1(x)= (3x+1)/(2-x)

Il faut donc démontrer que

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{2-x} = -3$:

$$\frac{3x+1}{2-x} = \frac{x}{x} \times \frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1} = \frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1}$$

Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} - 1\right) = -1.$$

Et donc par quotient de limites

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1} = \frac{3}{-1} = -3$$

Et donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$.

2) Soit g la fonction définie sur

$]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$ par $(x) = \frac{2x}{x-4}$

Démontrer que la droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à la courbe représentative de g.

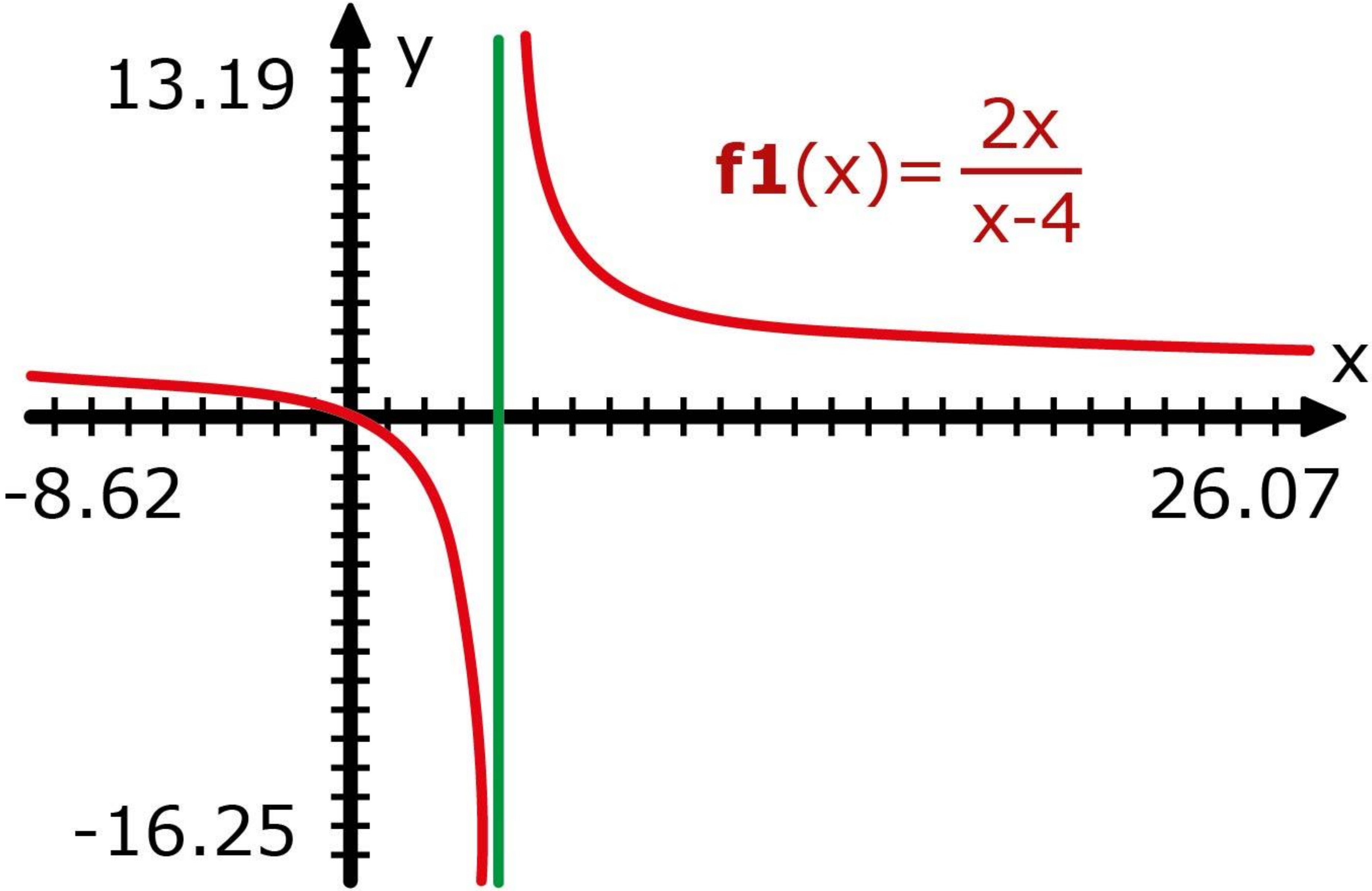
Il faut donc démontrer que la limite de la fonction g possède une limite infinie en 4.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} (x - 4) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 4} 2x = 8$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} \frac{2x}{x-4} = -\infty$ car $x - 4 < 0$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} (x - 4) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 4} 2x = 8$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} \frac{2x}{x-4} = +\infty$ car $x - 4 > 0$


y
13.19
$f1(x)=\frac{2x}{x-4}$
x
-8.62
26.07
-16.25

On en déduit que la droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à la courbe représentative de g.

Propriété :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

IV. Limite d'une fonction composée

Exemple : Soit la fonction f définie sur

$\left]\frac{1}{2};\ +\infty\right[$ par $(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$

On souhaite calculer la limite de la fonction

f en $+\infty$

On considère les fonctions u et v définie par : $u(x) = 2 - \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$

Alors : $f(x) = v(u(x))$. On dit alors que f est la **composée** de la fonction u par la fonction v.

Or, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 2$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{u(x)}$

$$= \lim_{x \to 2} \sqrt{X}$$

$$= \sqrt{2}$$

D'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{2}$

Théorème :

A, B, C peuvent désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

Si $\lim_{x \to A} u(x) = B$ et $\lim_{x \to B} v(x) = C$ alors

$\lim_{x \to A} v(u(x)) = C$

- Admis -

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{4x-1}{2x+3}}$

V. Limites et comparaisons

1) Théorème de comparaison

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a;+\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x)$

– Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

(figure 1)

− Si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

(figure 2)

− Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

(figure 3)

− Si $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

(figure 4)

Propriétés (croissances comparées) :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et pour tout entier n,

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction f pousse la fonction g vers $+\infty$ pour des valeurs de x suffisamment grandes.

Figure 1

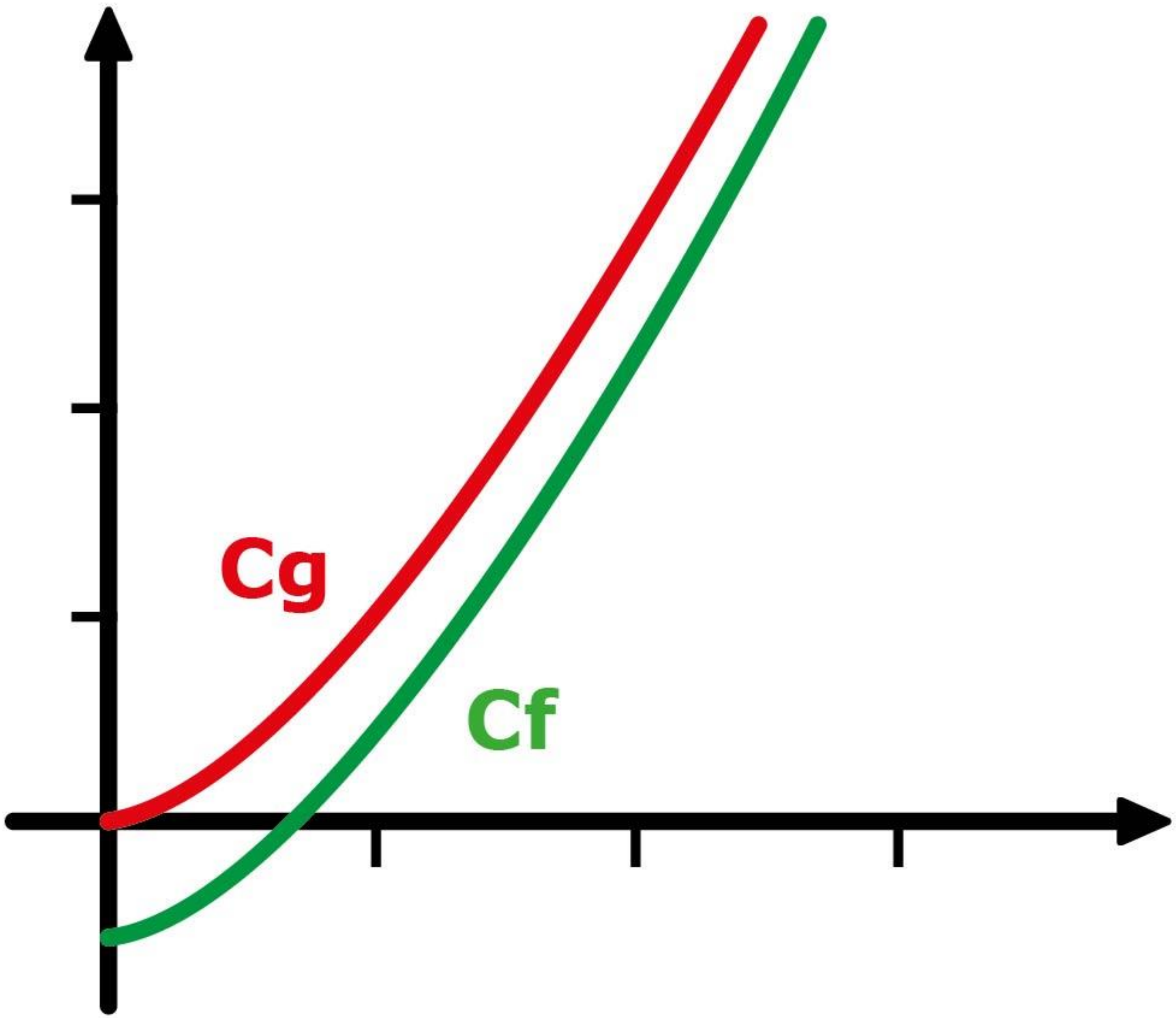


Figure 2

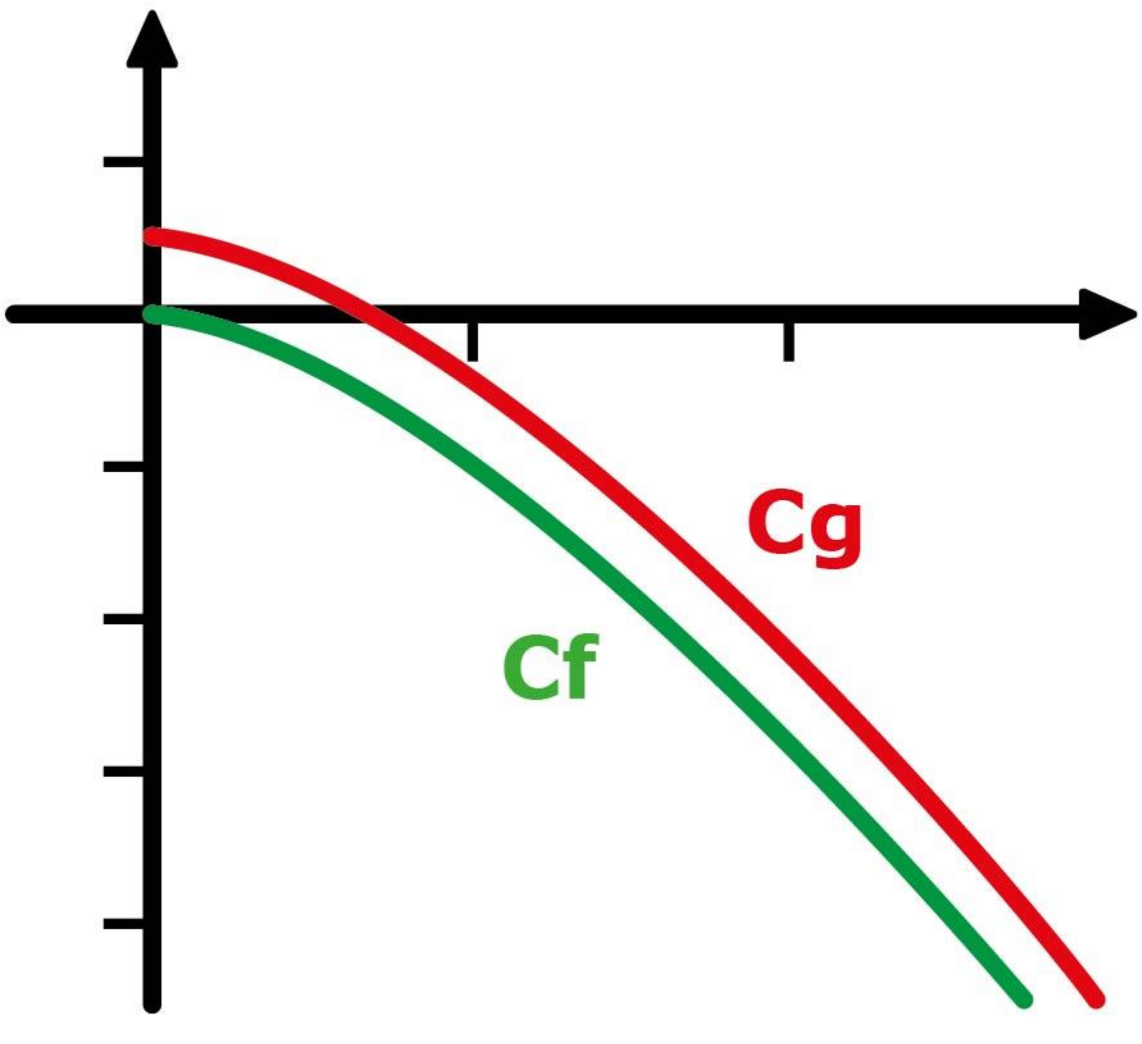


Figure 3

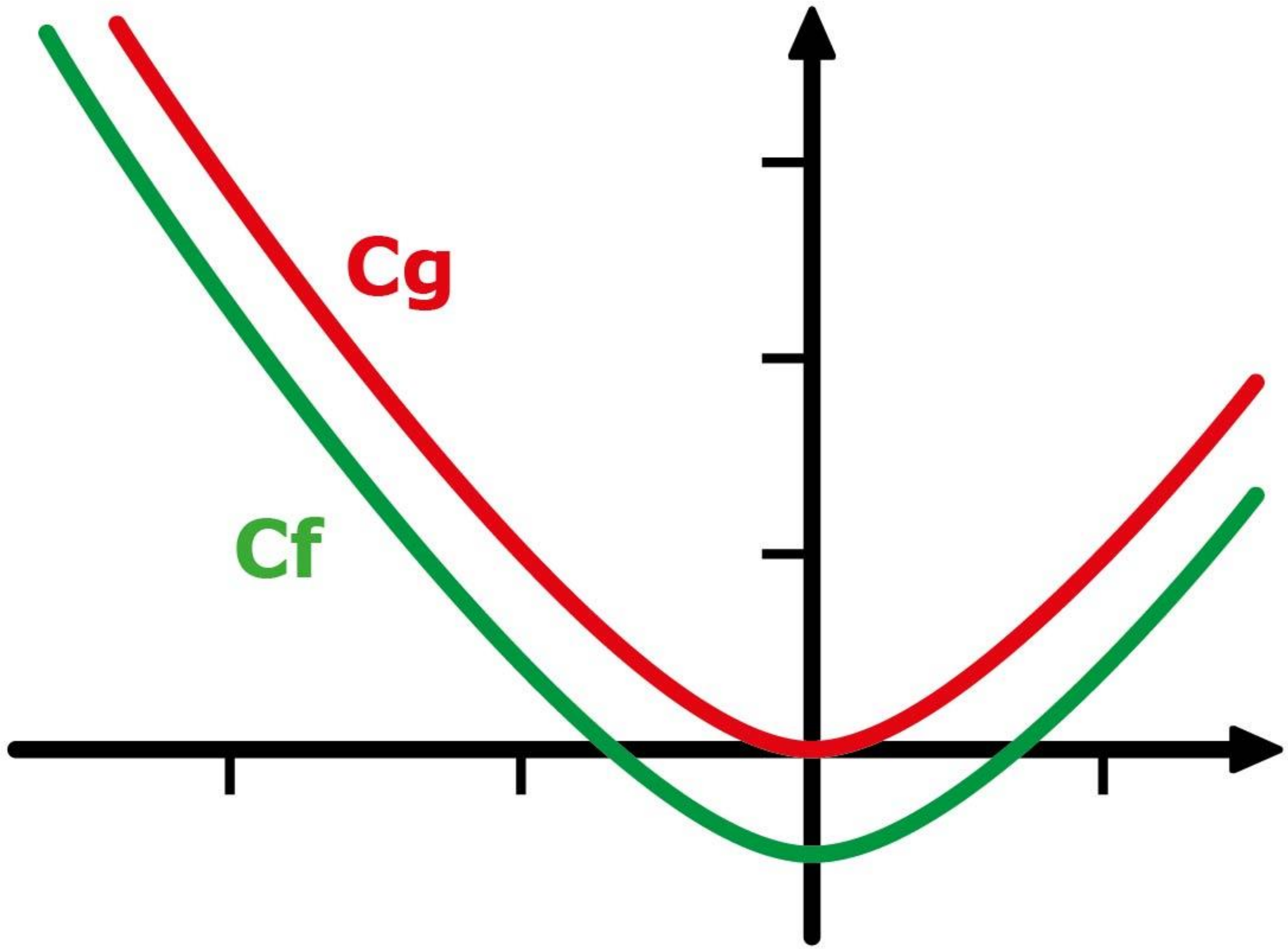
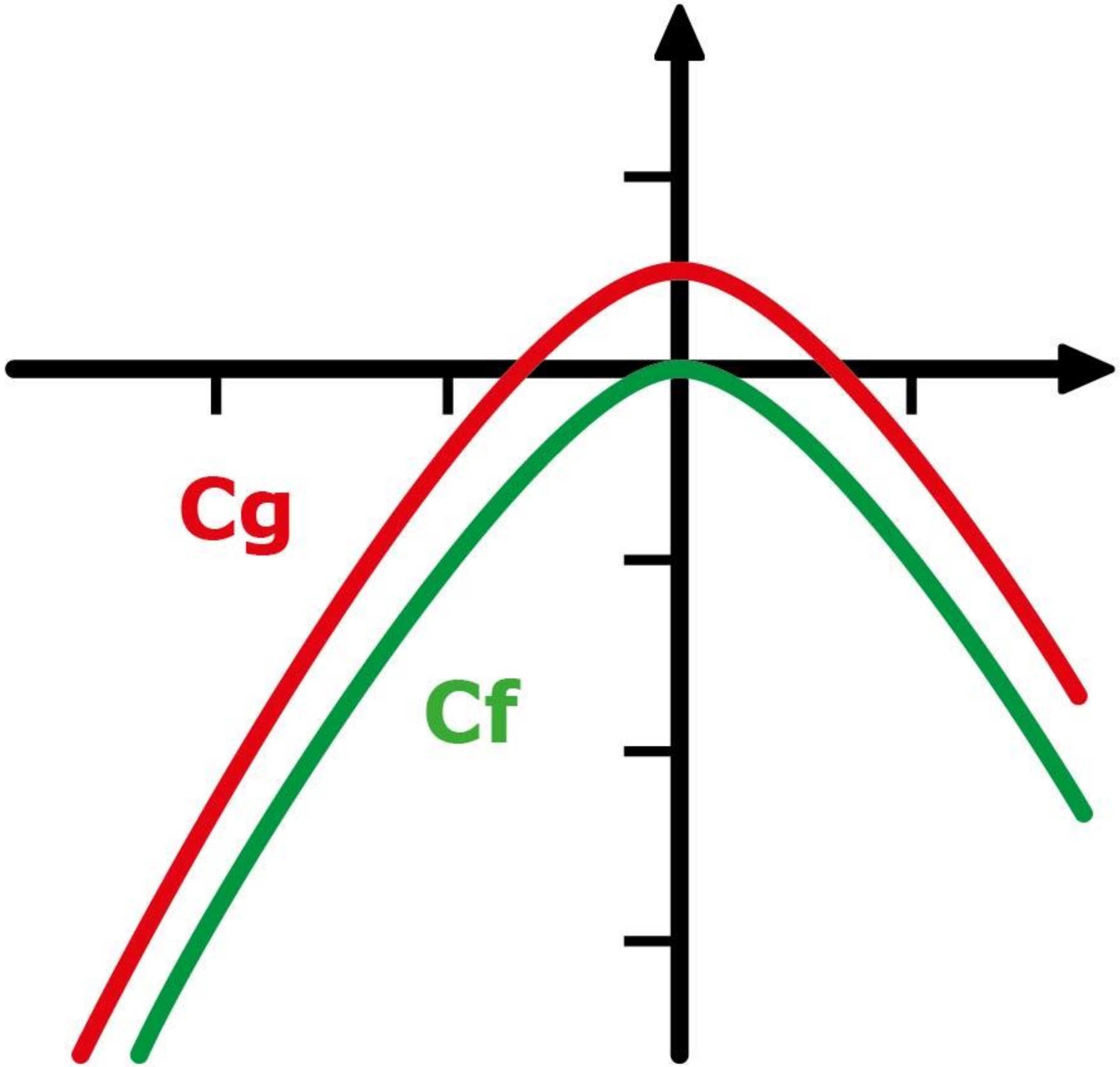


Figure 4



Démonstration dans le cas de la figure 1 :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle $]m;\ +\infty[$, m réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand, soit : $f(x) \geq m$

Or, dès que x est suffisamment grand, on

a $f(x) \leq g(x)$

Donc dès que x est suffisamment grand,

on a : $g(x) \geq m$

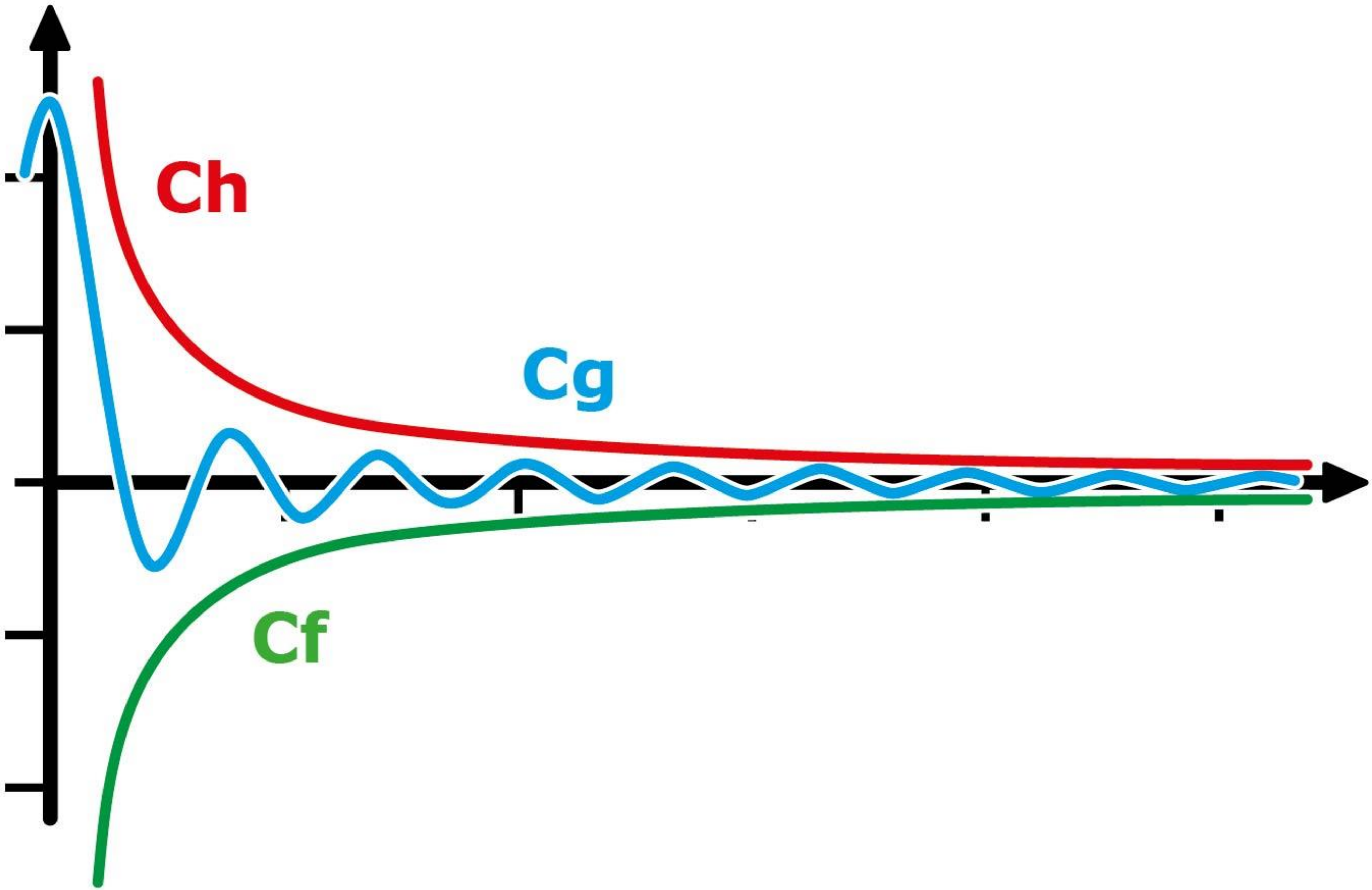
Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2) Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes : Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle $\left]a;\ +\infty\right[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$\boxed{\text{Si } \lim_{x \to +\infty} f(x) = L \text{ et } \lim_{x \to +\infty} h(x) = L \text{ alors } \lim_{x \to +\infty} g(x) = L}$

Remarque : On obtient un théorème analogue en $-\infty$


Ch
Cg
Cf

Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions f et h (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction g pour des valeurs de x suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.
Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich.

Méthode : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

Calculer :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1}$

1) $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

Pour tout x, $-1 \leq \sin x$ donc $x - 1 \leq x + \sin x$

Or $\lim_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty$$

2) $\lim_{x \to +\infty} \cos x$ n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

Pour tout x, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc

$-x \leq \cos x \leq x$ car $x > 0$. Et donc

$$-\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$$

Ou encore

$$-\frac{x}{x^2} \leq -\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2}$$

Soit $-\frac{1}{x} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x}$

Or $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ alors d'après le théorème des gendarmes, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1} = 0$$