Fonctions de référence

2nde - Programme 2019

I. Rappels sur les fonctions affines
1) Définition

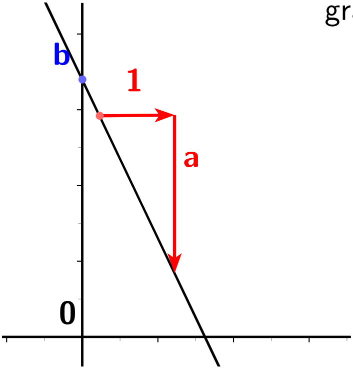
Définition

Une **fonction affine** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout nombre réel x associe le nombre $ax+b$, où a et b sont des nombres réels donnés.
On a : $f(x) = ax+b$.

2) Représentation graphique

Propriété

La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est une droite.



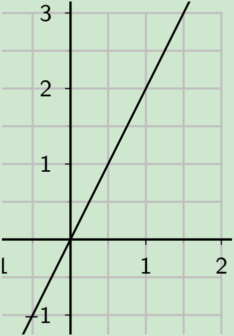
Si la droite $\mathscr{D}$ est la représentation graphique de la fonction $f(x) = ax + b$:

- a est appelé **coefficient directeur** de la droite $\mathscr{D}$;
  on peut le calculer ainsi :
  $a = \dfrac{f(v) - f(u)}{v - u}$, où u et v sont deux nombres réels ;
- le point de coordonnées $(0\,;\,b)$ appartient à $\mathscr{D}$ et le nombre b est appelé **ordonnée à l'origine** de la droite $\mathscr{D}$.

Cas particuliers

- lorsque $b = 0$, on dit que f est une fonction **linéaire**.
  Dans un repère, une fonction linéaire est représentée par une droite qui passe par l'origine du repère.

Exemple

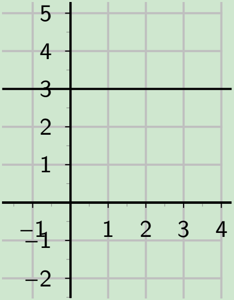


$f(x) = 2x$

Cas particuliers (suite)

- lorsque $a = 0$, on dit que f est une fonction **constante**.
  Dans un repère, une fonction constante est représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple



$g(x) = 3$

3)Sens de variation

Propriété

Soit $f(x) = ax + b$ *une fonction affine.*

- *Si* $a > 0$ *alors* f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
- *Si* $a < 0$ *alors* f *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$.
- *Si* $a = 0$ *alors* f *est constante sur* $\mathbb{R}$.

II. Fonction carré
1) Définition

Définition

On appelle fonction carré la fonction $x \mapsto x^2$.

Exemples

L'image de 3 par la fonction carré est 9.
L'image de -3 par la fonction carré est 9.
Les antécédents de 4 par la fonction carré sont 2 et -2.

Propriété

La fonction carré $x \mapsto x^2$ *est définie sur* $\mathbb{R}$.
Cette fonction est paire (pour tout x, $f(-x) = f(x)$*), donc la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées* (Oy).

Justification :
En effet, on peut calculer x^2 pour n'importe quelle valeur de $x \in \mathbb{R}$.
et pour tout x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

2) Sens de variation

Propriété

$f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

3)Représentation graphique

Pour tracer la courbe représentative de cette fonction, on remplit un tableau de valeurs :

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	...
$f(x)$								...

x	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3
$f(x)$						

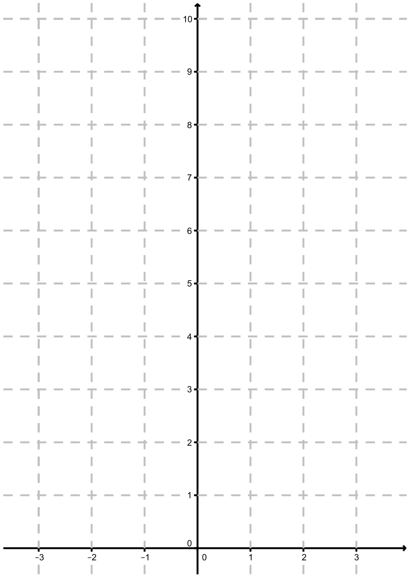
3)Représentation graphique

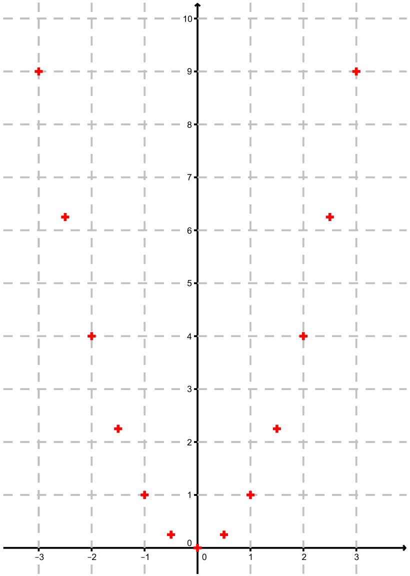
Pour tracer la courbe représentative de cette fonction, on remplit un tableau de valeurs :

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$\dots$
$f(x)$	9	$6{,}25$	4	$2{,}25$	1	$0{,}25$	0	$\dots$

x	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$f(x)$	$0{,}25$	1	$2{,}25$	4	$6{,}25$	9

On place ces points dans un repère orthonormé d'unités 1 cm :




10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−3
−2
−1
0
1
2
3

Cette courbe est appelée **parabole**.

III. Fonction cube

Définition

On appelle fonction cube la fonction $f : x \mapsto x^3$.

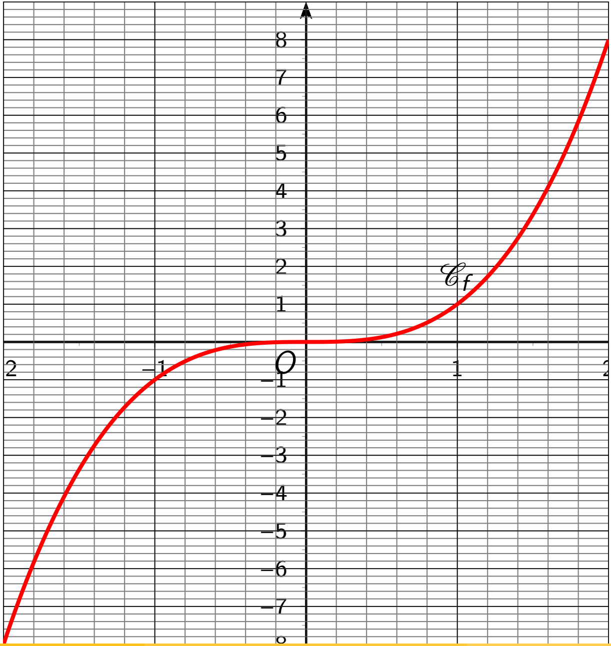
Propriété

- *Cette fonction est définie sur* $\mathbb{R}$.
- *Elle est impaire* ($f(-x) = -f(x)$ *pour tout* x) *(donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine* O*).*
- *Elle est croissante sur* $\mathbb{R}$.

Son tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↗	

Sa courbe représentative :



IV. Fonction inverse
1) Définition

Définition

On appelle fonction inverse la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Propriété

La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est définie sur* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$.

La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est impaire, c'est-à-dire* $f(-x) = -f(x)$ *pour tout* $x \neq 0$.

La courbe représentative de f *est donc symétrique par rapport à* O.

Démonstration :

- f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à O.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$

2) Sens de variation

Propriété

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est décroissante sur* $]-\infty\ ;\ 0[$ *et décroissante sur* $]0\ ;\ +\infty[$.

Attention, on ne peut parler de variation que sur un intervalle ; il est faux de dire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$:

par exemple : $-2 < 2$; $f(-2) = -\dfrac{1}{2}$, $f(2) = \dfrac{1}{2}$ donc $f(-2) < (2)$

Tableau de variation

0 est une valeur interdite, donc il faut mettre une double-barre en dessous de 0.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Démonstration :

- Sur $[0\ ;\ +\infty[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]0\ ;\ +\infty[$ avec $0 \leqslant x_1 < x_2$.

  Il s'agit de comparer les nombres $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1}$ et $f(x_2) = \dfrac{1}{x_2}$.

  $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$.

  $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$; $x_1 x_2 > 0$ comme produit de nombres positifs. Les images sont classées dans l'ordre inverse des antécédents, donc f est **décroissante** sur $]0\ ;\ +\infty[$.
- Sur $]-\infty\ ;\ 0[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]-\infty\ ;\ 0[$ avec $\leqslant x_1 < x_2 < 0$.

  On a le même calcul : $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$.

  $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$; $x_1 x_2 > 0$ comme produit de nombres négatifs. Les images sont classées dans l'ordre inverse des antécédents, donc f est **décroissante** sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

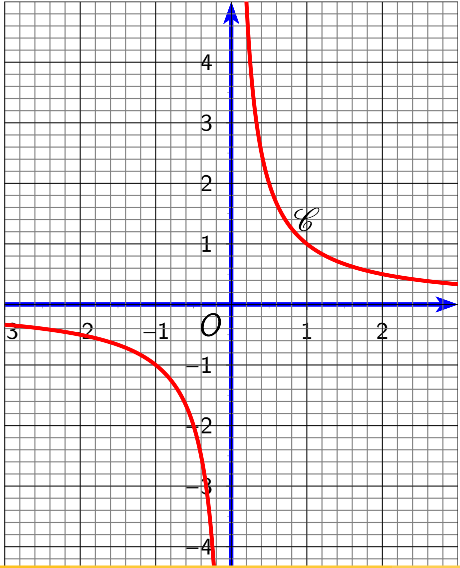
  Remarque : sur $]-\infty\ ;\ 0]$, on aurait pu utiliser la symétrie de la courbe par rapport à O.

3) Courbe représentative

Pour tracer la courbe, on trace la partie correspondant à des abscisses positives en calculant les coordonnées de quelques points.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x) = \frac{1}{x}$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

La courbe représentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole**. Elle est constituée de deux branches (symétriques par rapport à l'origine O).



V.Fonction racine carrée

Définition

On appelle fonction racine carrée la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$

Propriété

- *Cette fonction est définie sur* $[0\ ;\ +\infty[$ *(car on ne peut calculer la racine carrée que d'un nombre positif)*
- *Elle est croissante sur* $[0\ ;\ +\infty[$

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative :