FONCTION

LOGARITHME

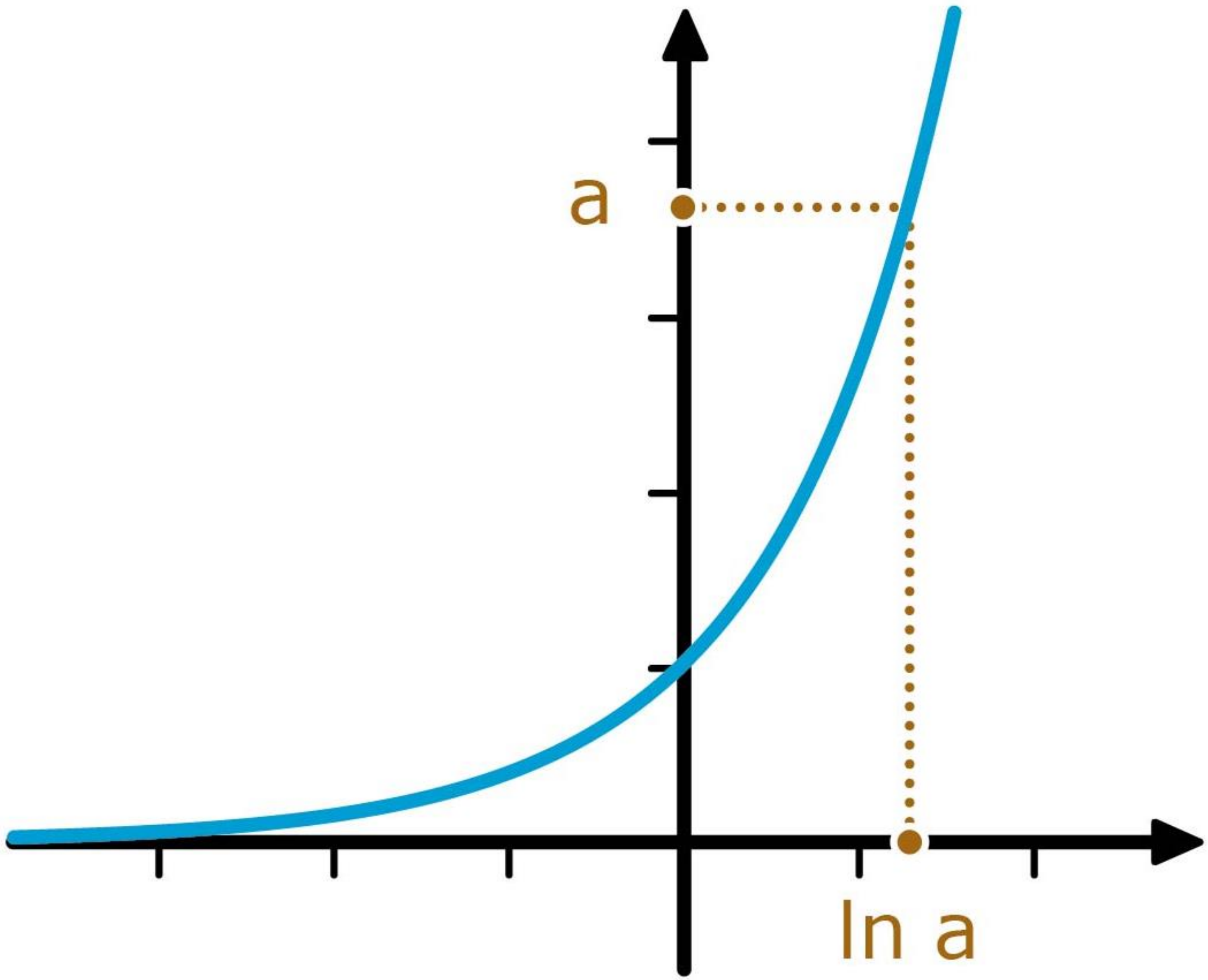
NEPERIEN

I. Définition

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]\,0; +\infty[$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a de

$]0;+\infty[$ l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.



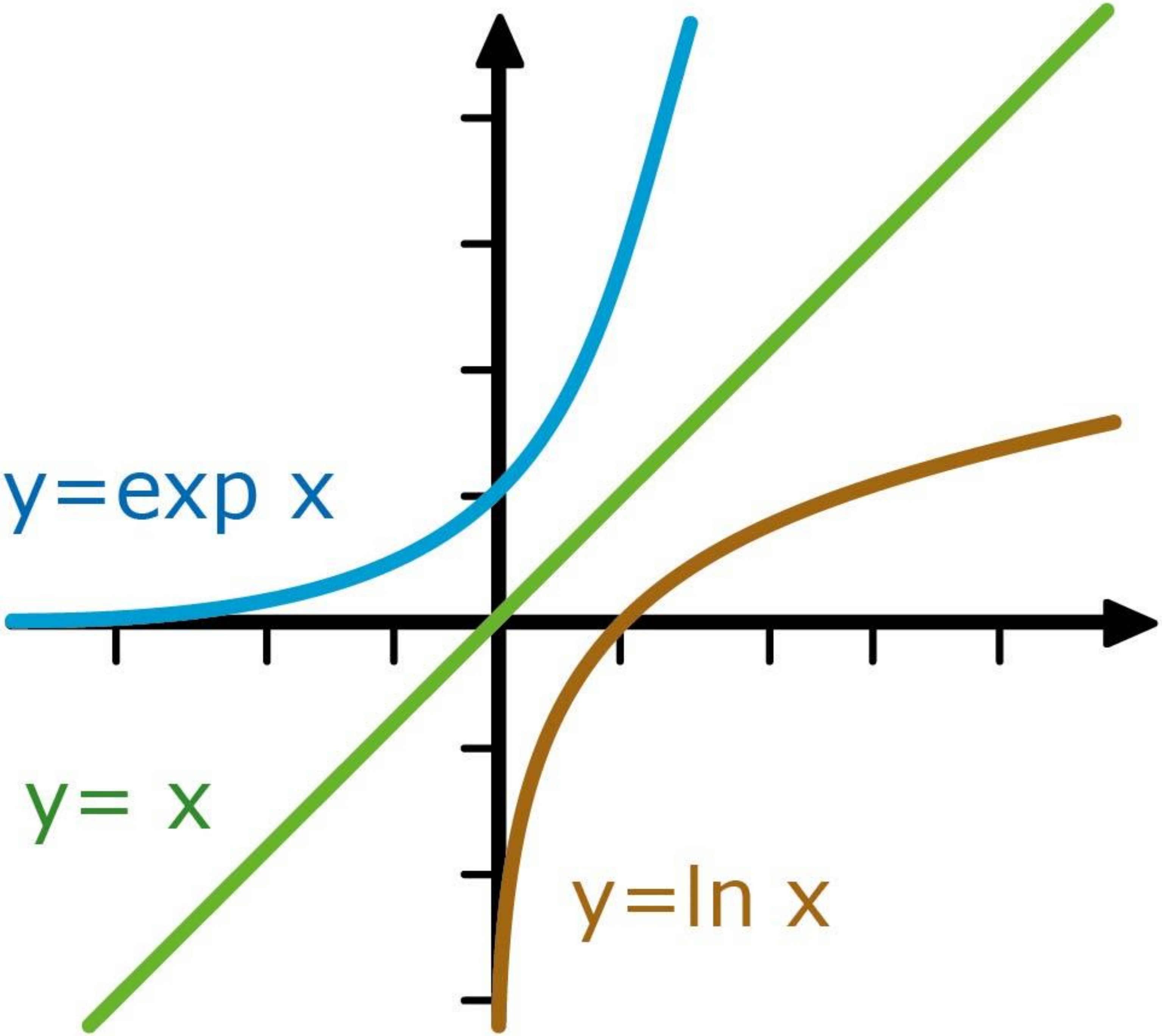
Définition : On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation e^{x}=a. On la note $\ln a$.
La fonction logarithme népérien, notée $\boldsymbol{ln}$, est la fonction :

$$ln\colon]\,0;\ +\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\boxed{x \mapsto \ln x}$$

Remarques :

— Les fonctions exp et ln sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.


y=exp x
y= x
y=ln x

— Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

— Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée $\boldsymbol{log}$ est définie par :

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Conséquences :

a) $y = \ln x \, avec \, x > 0 \iff x = e^{y}$

b) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \frac{1}{e} = 1$

c) Pour tout x, $\ln e^{x} = x$

d) Pour tout x strictement positif, $e^{\ln x} = x$

Démonstrations :

a) Par définition,

b) Car : $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{-1} = \frac{1}{e}$

c) Si on pose $= e^x$, alors

$$x = \ln y = \ln e^x$$

d) Si on pose $y = \ln x$, alors $x = e^y = e^{\ln x}$

II. Propriété de la fonction logarithme népérien

1) Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$$\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$$

Démonstration :

$e^{\ln(x \times y)} = x \times y = e^{\ln x} \times e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$ donc

$\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Remarque : Cette formule permet de transformer un produit en somme.

Corollaires : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$;

b) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$;

c) $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$;

d) $\ln x^n = n \ln x$ avec n entier relatif

Démonstrations :

a) $\ln\frac{1}{x} + \ln x = \ln\left(\frac{1}{x} \times x\right) = \ln 1 = 0$;

b) $\ln\frac{x}{y} = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln x = \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y$;

c) $2\ln\sqrt{x} = \ln\sqrt{x} + \ln\sqrt{x} = \ln\left(\sqrt{x} \times \sqrt{x}\right) = \ln x$;

d) On démontre ce résultat par

récurrence.

L'initialisation est triviale.

La démonstration de l'hérédité passe par la décomposition :

$$\begin{aligned} \ln x^{n+1} &= \ln(x^n \times x) \\ &= \ln x^n + \ln x \\ &= n \ln x + \ln x \\ &= (n+1) \ln x \end{aligned}$$

Méthode : Simplifier une expression

$$A = \ln\left(3-\sqrt{5}\right) + \ln\left(3+\sqrt{5}\right)$$

$$= \ln\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)$$

$$= \ln(9-5)$$

$$= \ln 4$$

$$B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$$

$$= \ln 2^3 + \ln 5 - \ln 3^2$$

$$= \ln \frac{2^3 \times 5}{3^2}$$

$$= \ln \frac{40}{9}$$

$$C = \ln e^2 - \ln \frac{2}{e}$$

$$= 2 \ln e - \ln 2 + \ln e$$

$$= 2 - \ln 2 + 1$$

$$= 3 - \ln 2$$

III. Etude de la fonction logarithme népérien

1) Continuité et dérivabilité

Propriété : La fonction logarithme népérien est continue sur $]0; +\infty[$

— Admis —

Propriété : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Démonstration :

La fonction ln est continue sur $]0; +\infty[$,

donc pour tout réel $a > 0$, on a :

$$\lim_{x \to a} \ln x = \ln a$$

Donc par composée de limites, en posant

$x = \ln x$:

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{X \to a} \frac{X - \ln a}{e^X - e^{\ln a}} = \lim_{X \to \ln a} \frac{1}{\frac{e^X - e^{\ln a}}{X - \ln a}}$$

Comme la fonction exponentielle est

dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{X \to \ln a} \frac{1}{\frac{e^X - e^{\ln a}}{X - \ln a}} = \frac{1}{e^{\ln a}} = \frac{1}{a}$$

et donc

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{a}$$

Exemple :

Dériver la fonction suivante sur l'intervalle

$] 0; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$f(x) = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \times x - (\ln x)^2 \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \ln x \, \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

2) Variations

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]\,0;\,+\infty[$

Démonstration : Pour tout réel $x > 0$,

$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$

Corollaires : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln x = \ln y \iff x = y$

b) $\ln x < \ln y \iff x < y$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$\ln(x-3)+\ln(9-x)=0$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$\ln(3-x)+\ln(x+1)\leq 0$

a) Ensemble de définition :

$x - 3 > 0$ et $9 - x > 0$

$x > 3$ $\quad$ $x < 9$

L'équation est définie sur $]\,3\,;\,9\,[$.

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$\Leftrightarrow \ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x-3) + \ln(9-x) = \ln 1$

$$\Leftrightarrow (x-3)+(9-x)=1$$

$$\Leftrightarrow -x^2+12x-27=1$$

$$\Leftrightarrow -x^2+12x-28=0$$

$\Leftrightarrow x=\frac{-12+\sqrt{32}}{-2}=6+2\sqrt{2}$ et

$$x=\frac{-12-\sqrt{32}}{-2}=6+2\sqrt{2}$$

Les solutions sont donc $6-2\sqrt{2}$ et $6+2\sqrt{2}$ car elles appartiennent bien à l'ensemble de définition.

b) Ensemble de définition :

$3-x>0$ et $x+1>0$

$x<3$ et $x>-1$

L'inéquation est définie sur $]-1\,;\,3[$.

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$

$\Leftrightarrow \ln(3-x) \leq \ln(x+1)$

$\Leftrightarrow 3 - x \leq x + 1$

$\Leftrightarrow 2 \leq 2x$

$\Leftrightarrow 1 \leq x$

L'ensemble solution est donc $]\,1;3\,[$

3) Limites aux bornes

Propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

Démonstration :

— Soit un intervalle $]\,a ; +\infty[$ quelconque.

Démontrons que cet intervalle contient toutes les valeurs de ln dès que x est suffisamment grand.

$\ln x > a$ à condition que $x > e^{a}$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln \frac{1}{X}$

$$= \lim_{X \to +\infty} (-\ln \mathrm{X})$$

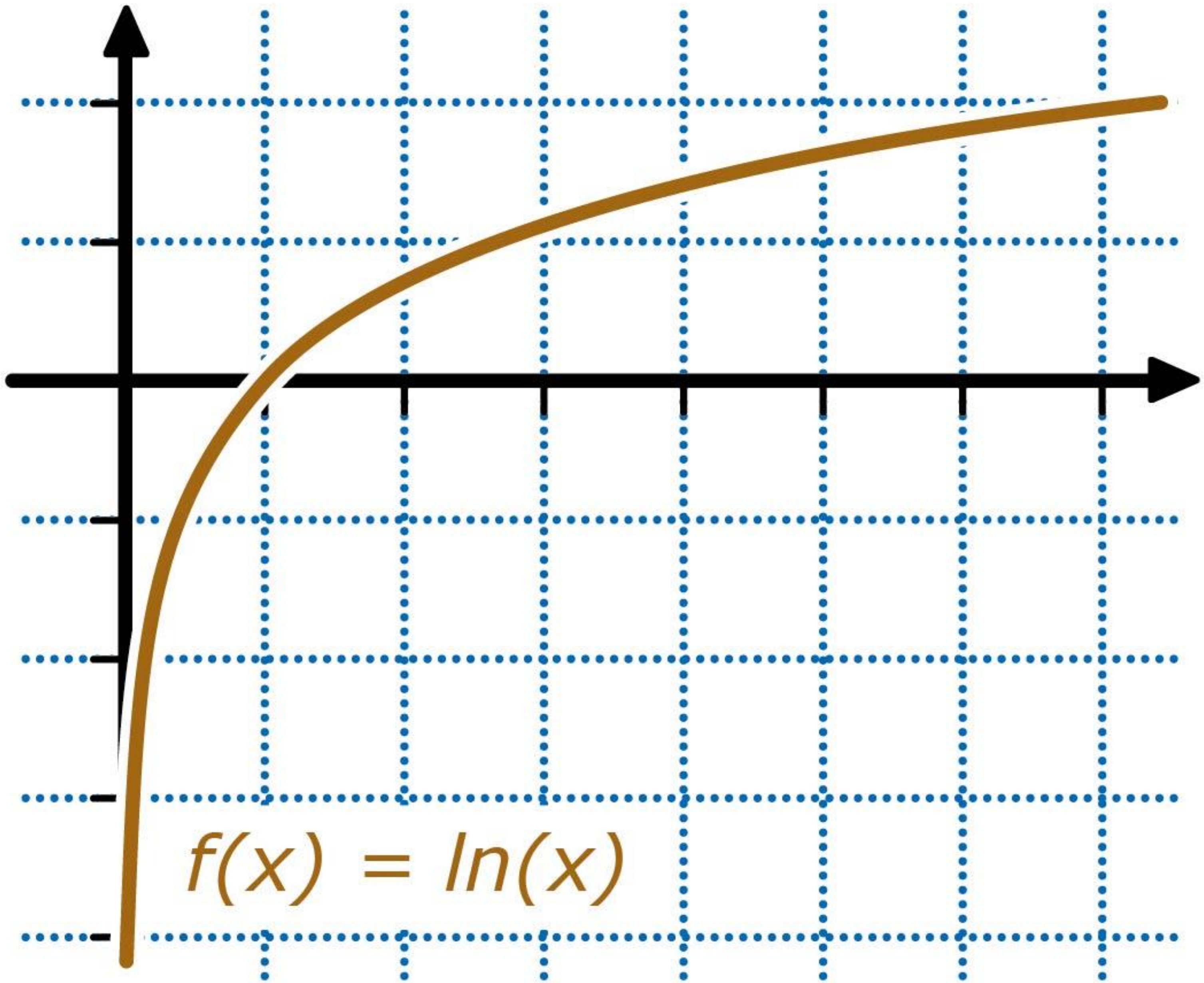
$$= -\infty$$

4) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	$+$	

$\ln x$		$+\infty$
	$-\infty$	


f(x) = ln(x)

IV. Limites et croissances comparées

Propriétés (croissances comparées) :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et pour tout entier non nul n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ et pour tout entier n,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$$

Démonstrations dans les cas où

$\boldsymbol{n} = \mathbf{1}$ **:**

En posant $X = \ln x$:

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ par croissance comparée de $X \longmapsto x$ et $X \longmapsto e^x$

b) $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = \lim\limits_{X \longrightarrow -\infty} e^X \times X = 0$ par croissance comparée de $X \longmapsto x$ et $X \longmapsto e^x$

Remarque : Les fonctions puissances imposent leur limite devant la fonction logarithme népérien.

Propriétés :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration :

La fonction $\ln$ est dérivable en 1 et $\ln(1) = 1$

Donc $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

car $\ln 1 = 0$.

Méthode 1: Déterminer une limite

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x - \ln x)$

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln x}{x-1}$

a) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\infty - \infty$ ". Levons l'indétermination:

$x - \ln x = x(1 - \dfrac{\ln x}{x})$ et comme $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$,

on a : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (1 - \dfrac{\ln x}{x}) = 1$. Et donc

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x(1 - \frac{\ln x}{x}) = +\infty$ soit $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty$

b) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ". Levons l'indétermination :

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} = \lim\limits_{X \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ comme composée de limites.

c) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Levons l'indétermination : $\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{\ln x}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$. Et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0$$

Méthode 2: Étudier les variations d'une fonction contenant des logarithmes

1) Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 3 - x + 2\ln x$$

2) Étudier la convexité de la fonction f.

1) Sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, on a :

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2-x}{x}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]\,0\,;2\,]$ et strictement décroissante sur $[\,2\,;\,+\infty\,[$.

On dresse le tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	$1+2\ln 2$	$\searrow$	

$$f(2) = 3 - 2 + 2\ln 2 = 1 + 2\ln 2$$

2) Sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{-1 \times x - (2 - x) \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{-x - 2 + x}{x^2}$$

$$= \frac{-2}{x^2} < 0$$

La fonction f' est donc décroissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$. On en déduit que la fonction f est concave sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Méthode 3: Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d’équation $y = x$.

On considère la fonction g définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $g(x) = x - \ln x$.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$.

On a également : $g(1) = 1 - \ln 1 = 1$

On dresse ainsi le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\parallel$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

On en déduit que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$,

on a $g(x) = x - \ln x \geq 1 > 0$ soit $x > \ln x$.

La fonction logarithme est située en dessous de la droite d'équation $y = x$.

V. Fonctions de la forme $\boldsymbol{ln\,u}$

Propriété : Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est dérivable sur I.
Sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

- Admis -

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $]\,0;2\,[$ par

$f(x) = \ln(2x - x^2)$ alors $f'(x) = \frac{2-2x}{2x-x^2}$

Propriété : Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Les fonctions $x \longmapsto \mathrm{u}(x)$ et $x \longmapsto \ln u(x)$ ont le même sens de variation.

Démonstration :

On a $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Comme $u > 0$, u' et $(\ln u)'$ sont de même signe.

Méthode : Etudier une fonction

On considère la fonction f définie sur $]-2; 1[$ par $f(x) = \ln(\frac{x+2}{1-x})$

a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f.

c) Déterminer le sens de variation de la fonction f.

d) Tracer sa courbe représentative.

a) – $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{1-x} = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x-2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$ comme composée de limites.

– $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x+2}{1-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ comme composée de limites.

b) La fonction $u : x \longmapsto \frac{x+2}{1-x}$ est strictement positive et dérivable sur $]-2;1[$ donc f est dérivable sur $]-2;1[$

c) $u'^{(x)} = \frac{1\times(1-x)-(x+2)\times(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x+2}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$

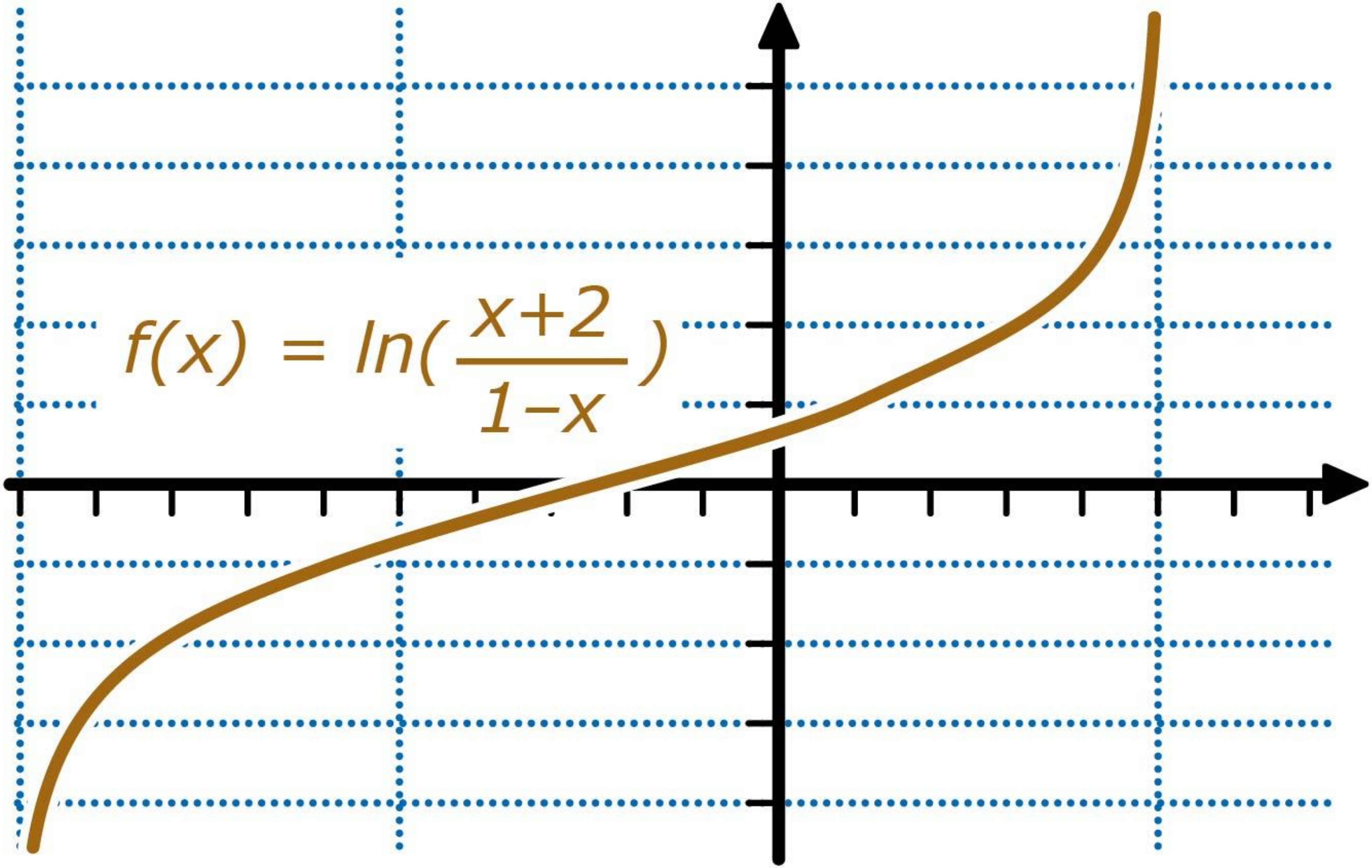
Donc $u(x) > 0$

La fonction u est donc strictement croissante sur $]-2;1[$, d'où :

La fonction f est strictement croissante sur

$]-2;\ 1[$.

x	-2			1
$f'(x)$	$\Vert$	$+$		$\Vert$
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\Vert$


$f(x) = ln(\frac{x+2}{1-x})$