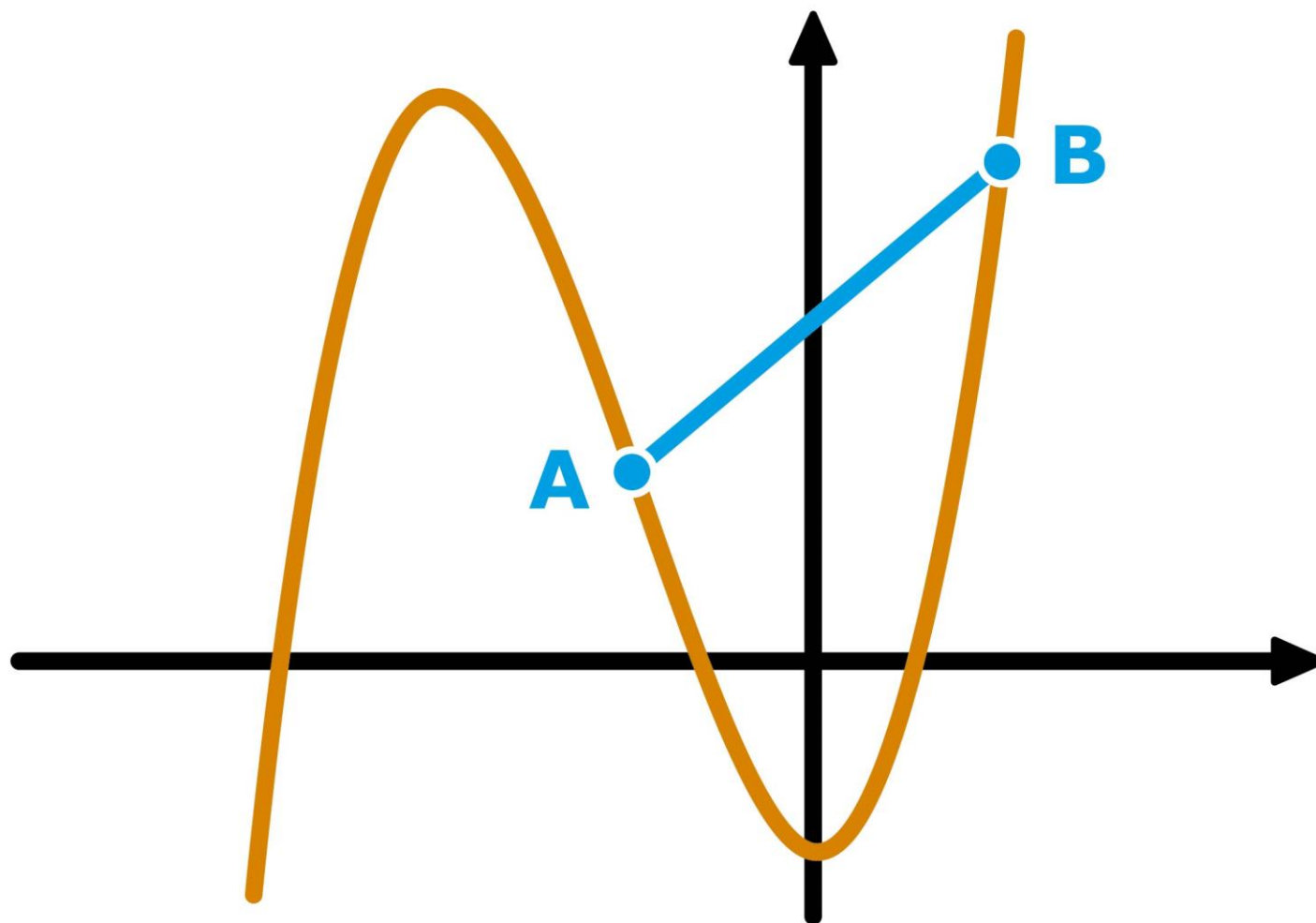


Fonction convexe et fonction concave

a) Définitions avec les cordes

Définition : Une **corde** est un segment reliant deux points d'une courbe.

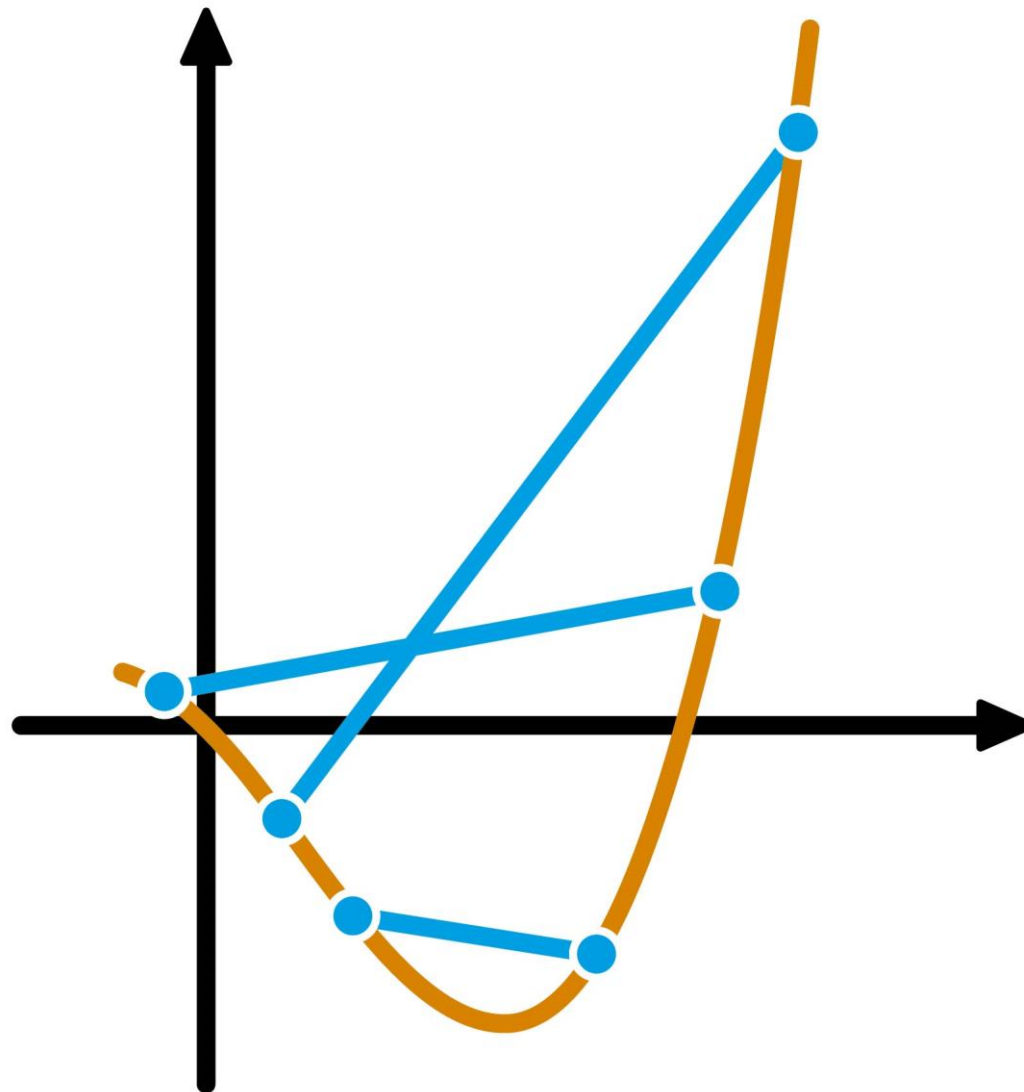


Définitions : Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

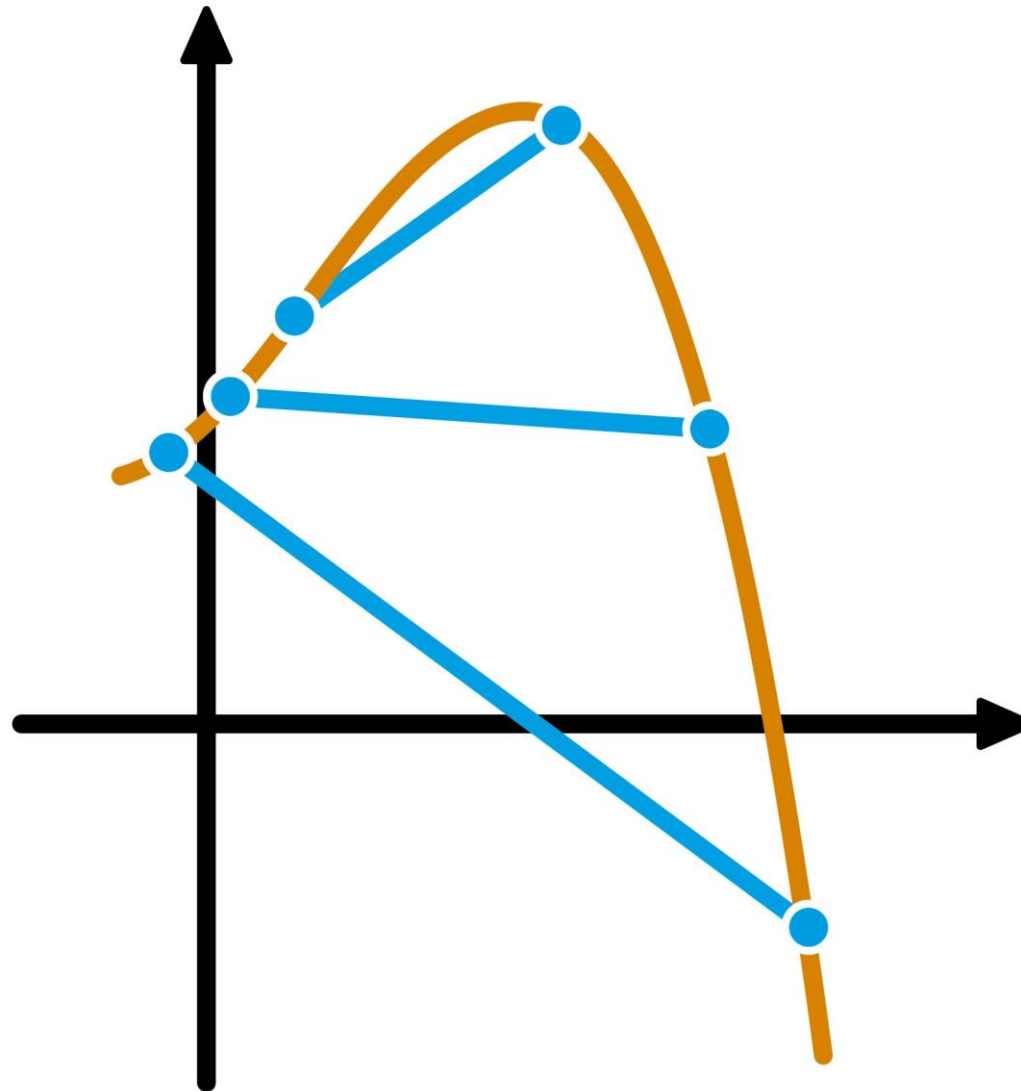
— La fonction f est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I , sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.

— La fonction f est **concave** sur I si, sur l'intervalle I , sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.

Fonction
convexe



Fonction
concave



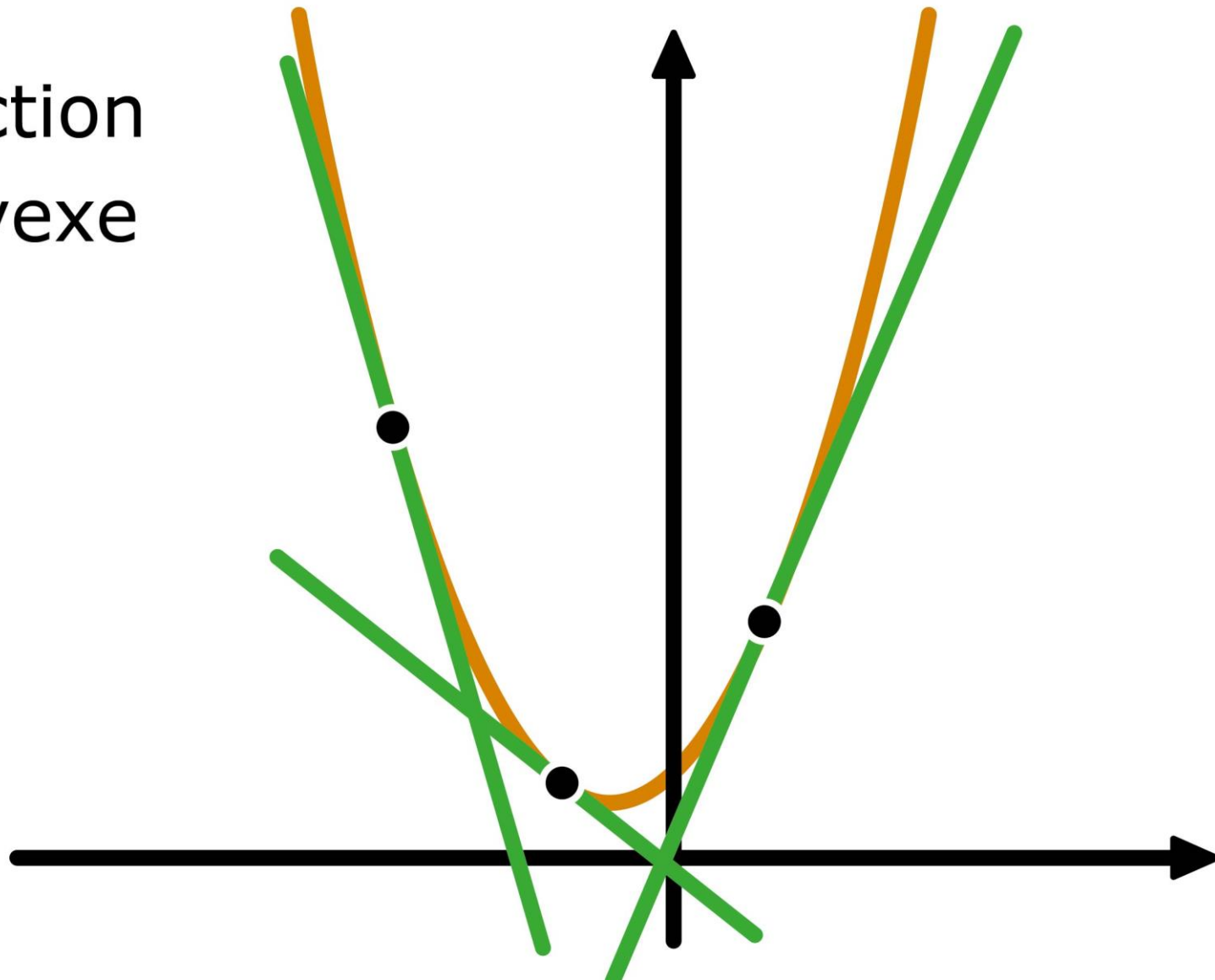
b) Définitions avec les tangentes

Définitions : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

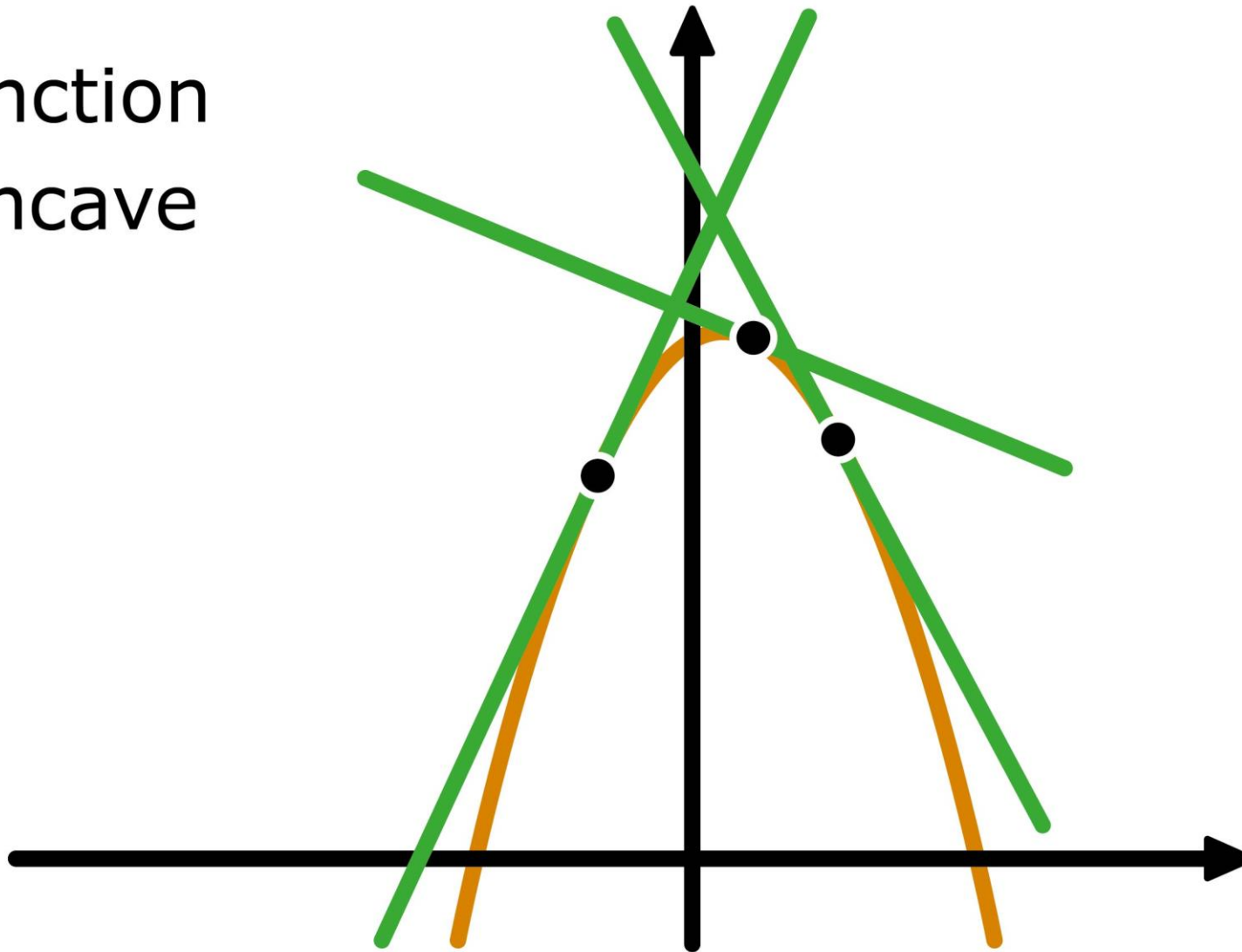
La fonction f est convexe sur I si, sur l'intervalle I , sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

La fonction f est concave sur I si, sur l'intervalle I , sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.

Fonction
convexe



Fonction
concave



Propriétés :

- La fonction carré $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cube $x \mapsto x^3$ est concave sur $] -\infty; 0 [$ et convexe sur $] 0; +\infty [$.
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $] -\infty; 0 [$ et convexe sur $] 0; +\infty [$.

- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0; +\infty[$.

- Admis -

Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .

La fonction f est convexe sur I si sa dérivée f' est croissante sur I .

La fonction f est concave sur I si sa dérivée f' est décroissante sur I .

- Admis -

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = 6x - 2$.

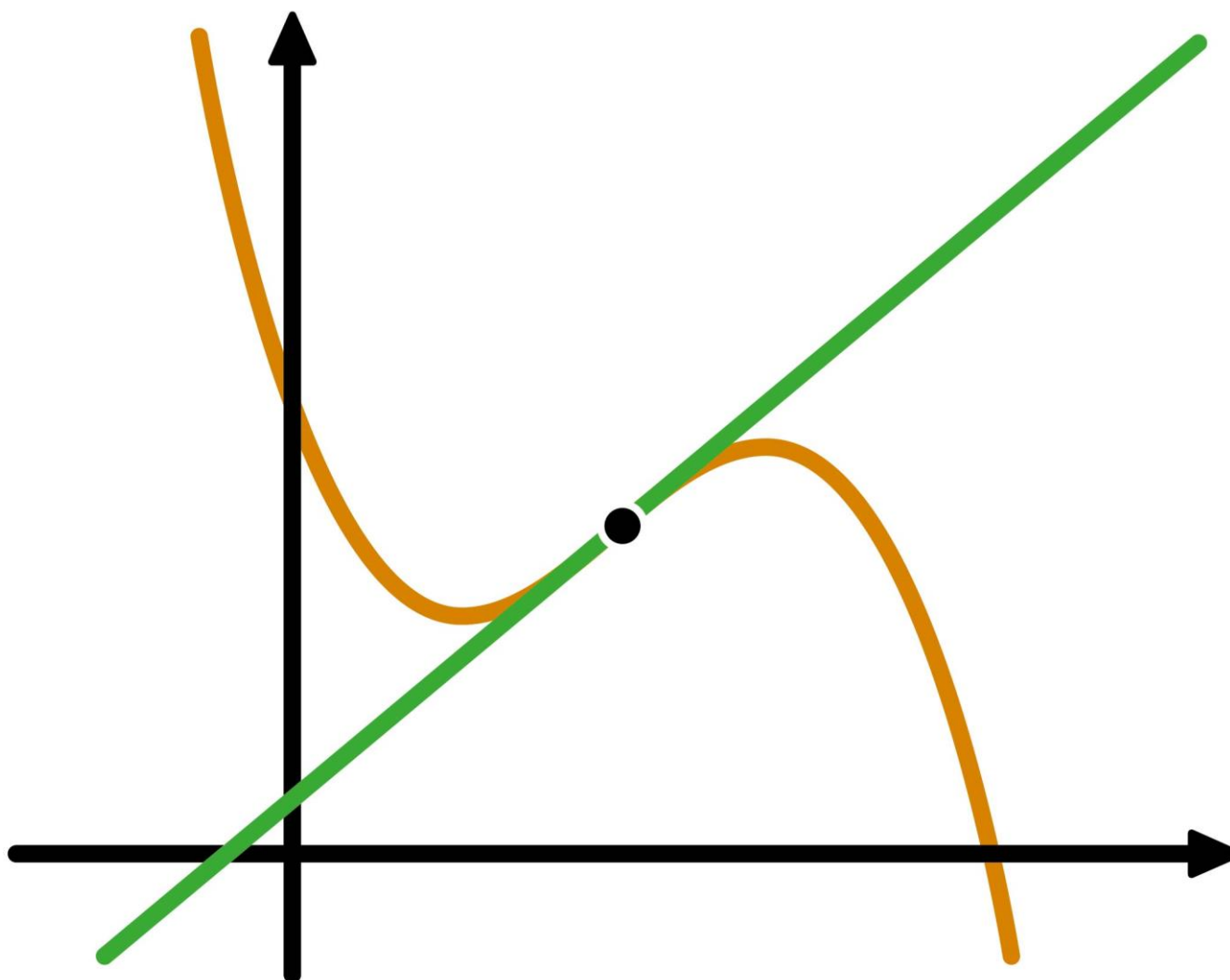
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f''(x) = 6 > 0$.

f' est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) Point d'inflexion

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.



Remarque importante :

Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Exemple :

On considère la fonction cube $x \mapsto x^3$.

La tangente au point $O(0,0)$ est l'axe des abscisses.

Pour $x \leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.

Pour $x \geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.

La tangente à la courbe en 0 traverse donc la courbe.

Le point O est un point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

