

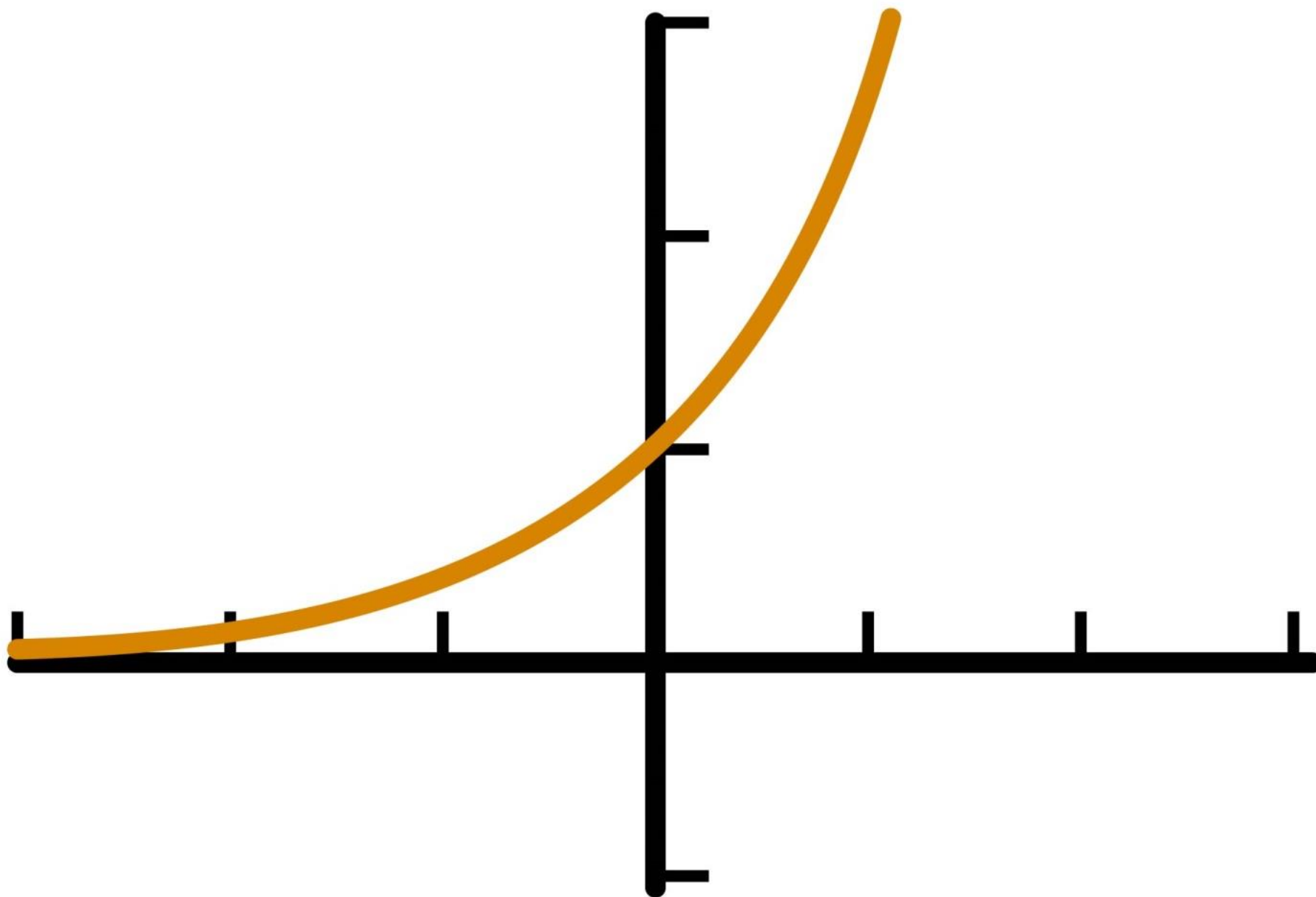
FONCTION EXPONENTIELLE

I. Définition de la fonction exponentielle

Propriété et définition : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note **exp**

Conséquence : $\exp(0) = 1$

Avec la calculatrice, il est possible
d'observer l'allure de la courbe
représentative de la fonction
exponentielle :



Remarque : On verra dans le paragraphe II. que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi $\exp(21)$ dépasse le milliard. Pour des valeurs de x de plus en plus grandes, la fonction exponentielle prend des valeurs de plus en plus grandes.

Propriété : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

II. Étude de la fonction exponentielle

1) Dérivabilité

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp x)' = \exp x$

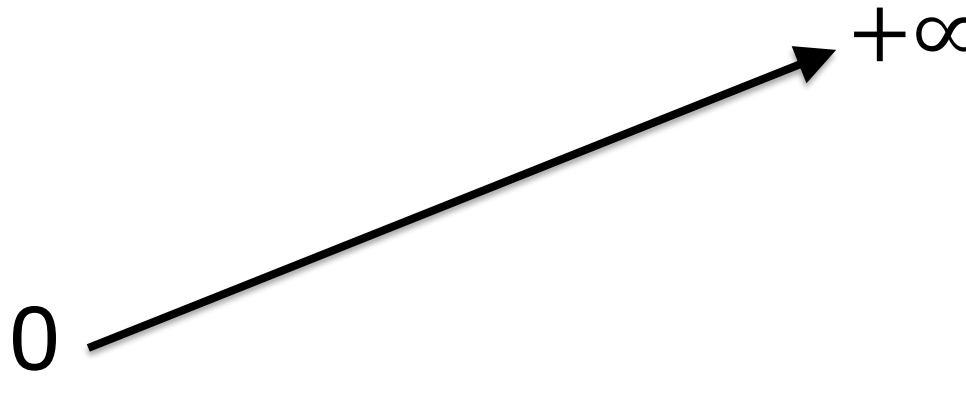
2) Variations

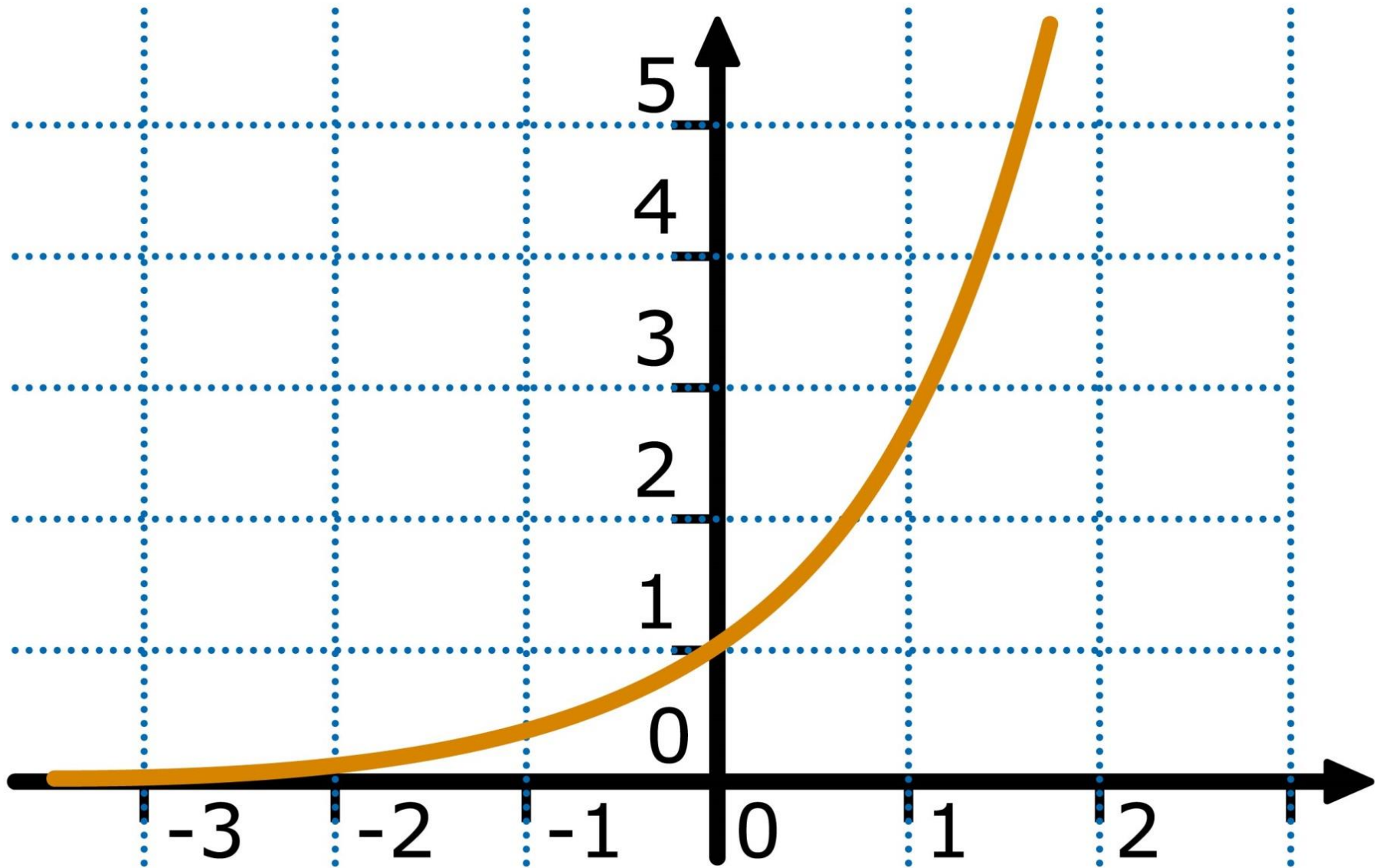
Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En effet, $(\exp x)' > 0$ car $(\exp x)' = \exp x > 0$.

3) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$ $+\infty$
$(\exp x)'$	$+$
$\exp x$	 A graph of the exponential function $\exp x$ is shown. The curve starts at the point $(-\infty, 0)$ and increases monotonically, approaching $+\infty$ as x increases. The curve is concave up and passes through the point $(0, 1)$.



III. Propriété de la fonction exponentielle

1) Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels x et y , on a :

$$\exp(x + y) = \exp x \exp y$$

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

Corollaires : Pour tous réels x et y , on a :

$$\text{a) } \exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \text{ ou encore}$$

$$\exp x \exp(-x) = 1$$

$$\text{b) } \exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}$$

$$\text{c) } \exp(nx) = (\exp x)^n \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Démonstration du a et b :

$$\text{a) } \exp x \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1$$

$$\text{b) } \exp(x - y) = \exp(x + (-y))$$

$$= \exp x \exp(-y) = \exp x \frac{1}{\exp y} = \frac{\exp x}{\exp y}$$

2) Le nombre e

Définition : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e .

On a ainsi $\exp 1 = e$

Remarque : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e .

$$e^1 \quad 2,718281828$$

Notation nouvelle :

$$\exp x = \exp(x \times 1) = (\exp 1)^x = e^x$$

On note pour tout x réel, $\exp x = e^x$

Comme π , le nombre e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.

Ses premières décimales sont :

$e \approx 2,7182818284\ 5904523536$

0287471352 6624977572 4709369995

9574966967 6277240766 3035354759

4571382178 5251664274...

Le nombre e est également un
nombre transcendant. On dit qu'un

nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.

Le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$. Un tel nombre est dit «algébrique».

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 ; 1783), ci-dessus. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être

car e est la première lettre du mot exponentiel.

Dans « Introductio in
Analysin infinitorum » publié en
1748, Euler explique que :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Rappelons que par exemple $5!$ se lit "factoriel 5" et est égal à $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$. Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes. Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e .

Avec cette nouvelle notation, on peut ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle :

Propriétés : Pour tous réels x et y , on a :

a) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

b) $e^x > 0$ et $(e^x)' = e^x$

c) $e^{x+y} = e^x e^y e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} e^{-x} = \frac{1}{e^x} (e^x)^n$

$$= e^{nx},$$

avec $n \in \mathbb{N}$.

Méthode : Dériver une fonction exponentielle

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x - 3e^x$

b) $g(x) = (x - 1)e^x$

$$c) h(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$a) f'(x) = 4 - 3e^x$$

$$\begin{aligned} b) g'(x) &= 1 \times e^x + (x - 1)e^x \\ &= e^x + xe^x - e^x \\ &= xe^x \end{aligned}$$

$$c) h'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Méthode : Simplifier les écritures

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$$

$$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$$

$$C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$$

$$D = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$$

Propriétés : Pour tous réels a et b , on a :

a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0.$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

a) $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\text{Donc } x = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3 \text{ ou } x = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$$

Les solutions sont -3 et 1 .

$$\text{b) } e^{4x-1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle

$$\left[\frac{1}{4} ; +\infty \right[.$$

Méthode : Étudier une fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x + 1)e^x.$$

a) Calculer la dérivée de la fonction f .

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

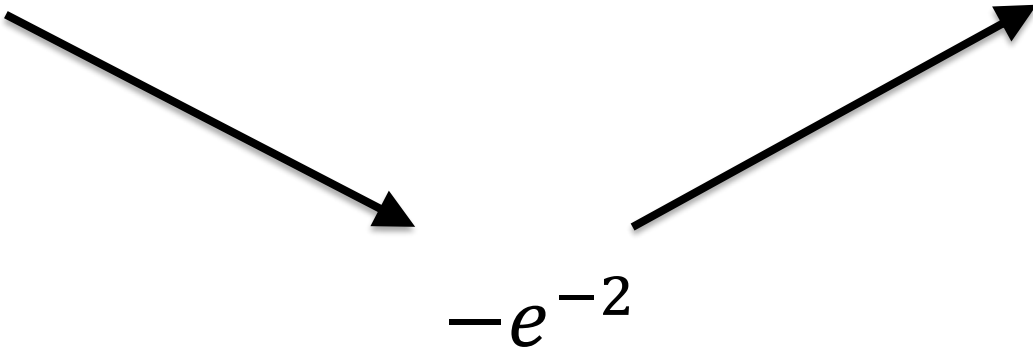
d) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

a) $f'(x) = e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$

b) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x + 2$.

f est donc décroissante sur l'intervalle $] -\infty ; -2]$ et croissante sur l'intervalle $[-2 ; +\infty [$.

On dresse le tableau de variations :

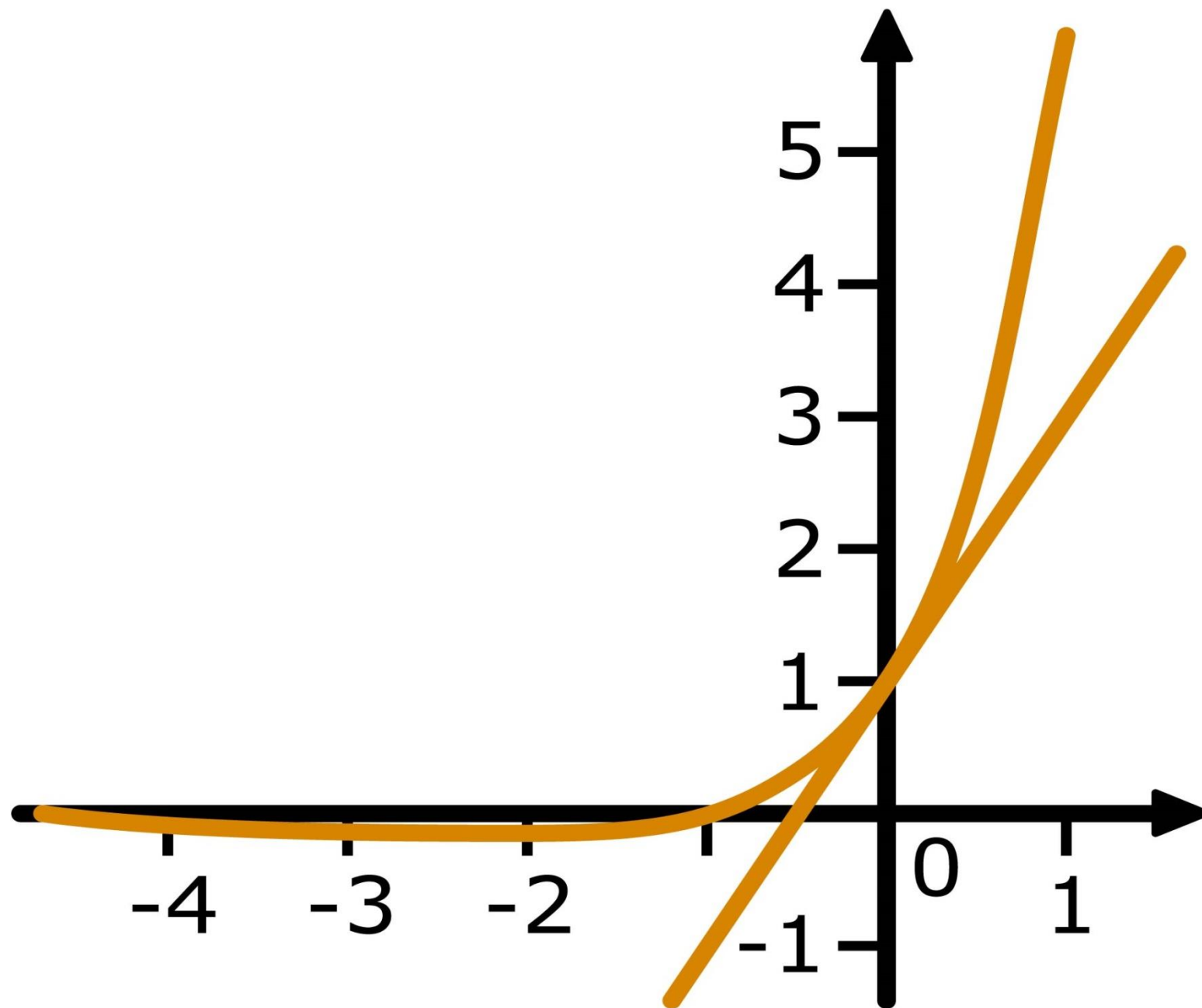
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

c) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$

Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit :

$$y = 2x + 1$$

d)



IV. Fonctions de la forme $t \mapsto e^{kt}$

1) Variations

Propriété :

La fonction $t \mapsto e^{kt}$, avec $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $t \mapsto ke^{kt}$.

Démonstration :

On rappelle que la dérivée d'une fonction composée $t \mapsto g(at + b)$ est $t \mapsto ag'(at + b)$.

En considérant $g(t) = e^t$, $a = k$ et $b = 0$, on a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$.

Exemple :

Soit $f(t) = e^{-4t}$ alors $f'(t) = -4e^{-4t}$.

Propriété :

Si $k > 0$: la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est croissante.

Si $k < 0$: la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est
décroissante.

Démonstration :

On a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$. Or, $e^{kt} > 0$ pour tout réel t et tout entier relatif k non nul.

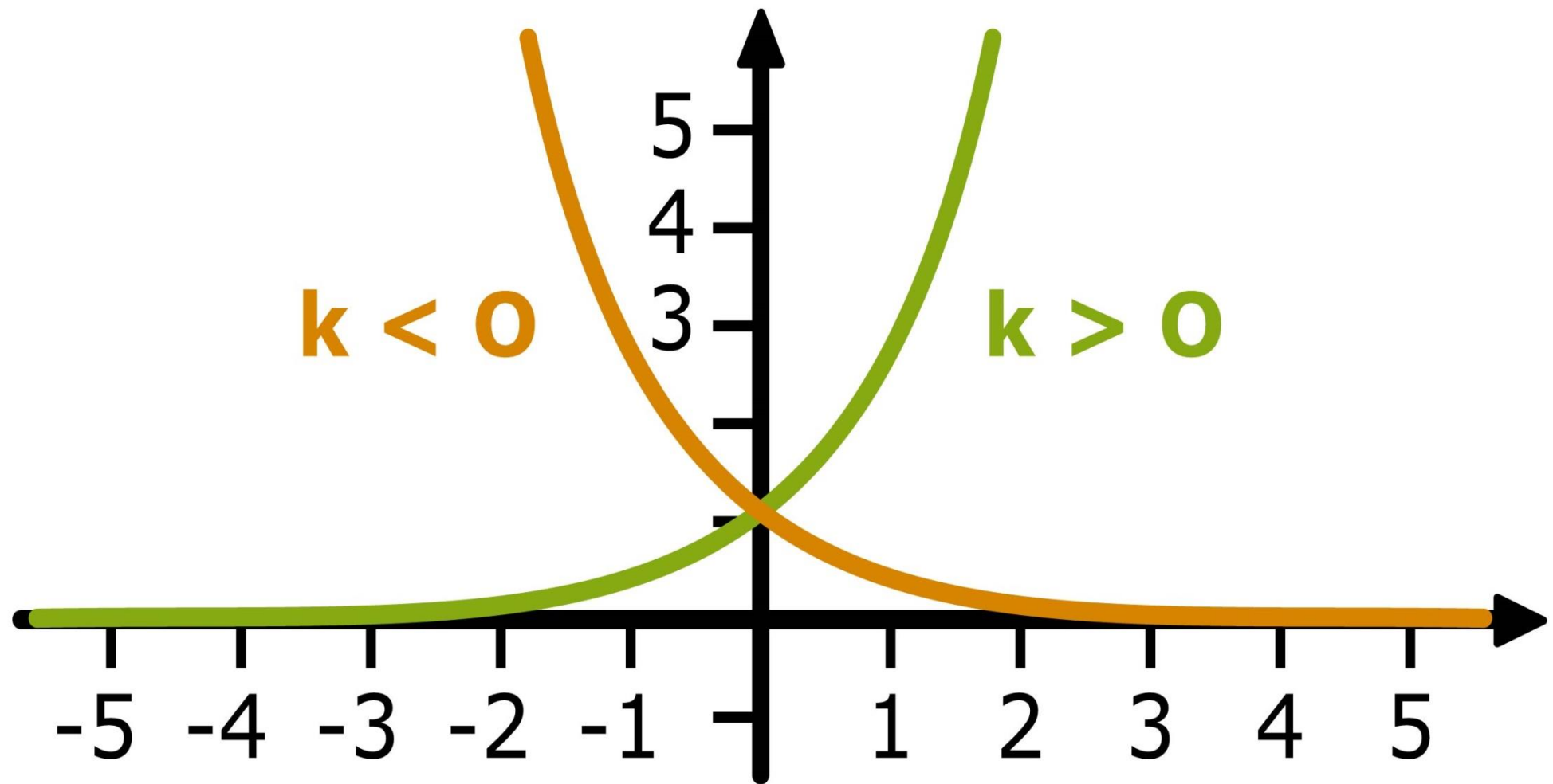
Donc le signe de la dérivée $t \mapsto ke^{kt}$ dépend du signe de k .

Si $k > 0$ alors la dérivée est positive est donc la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est croissante.

Si $k < 0$ alors la dérivée est négative est donc la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est décroissante.

2) Représentation graphique

$$t \mapsto e^{kt}$$



Méthode : Étudier une fonction $t \mapsto e^{kt}$

dans une situation concrète

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0 ; 10]$

et telle que $f'(t) = 0,14f(t)$.

1) Montrer que la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(t) = Ae^{0,14t}$ convient.

2) On suppose que $f(0) = 50000$.

Déterminer A .

3) Déterminer les variations de f sur $[0 ; 10]$.

- 4) a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
- b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

$$\begin{aligned} 1) f'(t) &= A \times 0,14e^{0,14t} = 0,14 \times Ae^{0,14t} \\ &= 0,14f(t). \end{aligned}$$

La fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(t) = Ae^{0,14t}$ vérifie bien l'égalité

$f'(t) = 0,14f(t)$ donc elle convient.

$$2) f(0) = Ae^{0,14 \times 0} = Ae^0 = A.$$

Donc, si $f(0) = 50\,000$, on a : $A = 50\,000$.

Une expression de la fonction f est donc :

$$f(t) = 50\,000e^{0,14t}.$$

3) Comme $k = 0,14 > 0$, on en déduit que la fonction $x \mapsto e^{0,14t}$ est strictement croissante sur $[0 ; 10]$. Il en est de même pour la fonction f .

$$4) \text{ a) } f(3) = 50\,000e^{0,14 \times 3} = 50\,000e^{0,42}$$

$$\approx 76\,000$$

$$f(5,5) = 50\,000e^{0,14 \times 5,5} = 50\,000e^{0,77}$$
$$\approx 108\,000$$

Après 3h, l'organisme contient environ
76 000 bactéries.

Après 5h30, l'organisme contient environ
108 000 bactéries.

b) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y₁
4,89	99 149
4,9	99 288
4,91	99 427
4,92	99 566
4,93	99 706

4,94	99 845
X	Y₁
4,95	99 985
4,96	100 125
4,97	100 266
4,98	100 406

4,99	100 547
-------------	----------------