Probabilités et échantillonnage

2nde - Programme 2019

1. Modéliser une expérience aléatoire
   - Loi de probabilité
   - Événements

2. Calculs de probabilités

I.Modéliser une expérience aléatoire
1) Loi de probabilité

Définition

L'**univers** d'une **expérience aléatoire** est l'ensemble de toutes ses issues. On le note Ω

Définir une **loi de probabilité** sur Ω, c'est associer à chaque issue une probabilité, c'est-à-dire un nombre positif ou nul, de telle façon que la somme des probabilités de toutes les issues soit égale à 1.

Exemple (1)

Une urne contient 6 boules (indiscernables au toucher) numérotées de 1 à 6. On tire une boule au hasard.

La loi de probabilité associée à cette expérience est :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Remarque

Dans cet exemple, toutes les probabilités sont égales : on est dans une **situation d'équiprobabilité**.

Dans ce cas, la probabilité d'une issue est $\frac{1}{n}$, où n est le nombre total d'issues.

Exemple (2)

On lance un dé qui a une face rouge, deux faces vertes et trois faces noires. La loi de probabilité associée à cette expérience est :

Issue	Rouge	Vert	Noir
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

2) Événements

Définitions

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Exemple

Voici la loi de probabilité d'un dé pipé :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,25

Si A est l'événement : "la face est paire", $A = \{2;4;6\}$

donc $p(A) = 0,15 + 0,15 + 0,25 = 0,55$.

B est l'événement : "la face est un multiple de 3 ", $B = \{3;6\}$

$p(B) = 0,15 + 0,25 = 0,4$.

Définitions

$\emptyset$ est appelé **événement impossible** : $p(\emptyset) = 0$.
E est appelé **événement certain** : $p(E) = 1$.

Remarque

Si A est un événement, $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

Propriété

***Dans le cas d'une loi équiprobable**, la probabilité d'un événement A est :*

$$p(A) = \frac{\textit{nombre d'issues réalisant } A}{\textit{nombre d'issues dans } E}$$

$$p(A) = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre total de cas}}$$

Exemple

On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes.
Soient A, B , et C les événements suivants :
A : la carte est le roi de cœur
B : la carte est un cœur
C : la carte est un roi
Alors

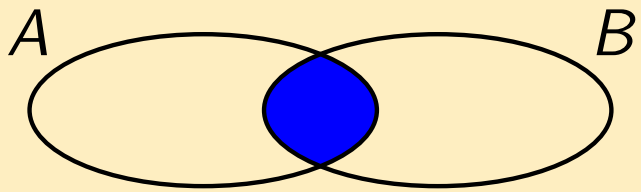
$$p(A) = \frac{1}{32}$$

$$p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

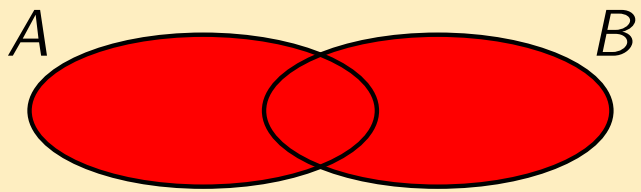
$$p(C) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Définitions

Soient A et B deux événements.
L'événement « A **et** B », noté $A \cap B$ est constitué des issues qui réalisent **à la fois** A et B. (On lit "A inter B".)



L'événement « A **ou** B », noté $A \cup B$ est constitué des issues qui réalisent **au moins un** des événements A ou B. (On lit "A union B").



Définitions

L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$ est constitué des issues qui ne réalisent pas A.

Les événements A et B sont **incompatibles** s'ils n'ont aucune issue en commun.

Exemple

Avec les notations A, B, C de l'exemple précédent :

$B \cap C = A$

$B \cup C$: la carte est un cœur ou un roi.

$\overline{B}$: la carte n'est pas un cœur.

Propriété

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Exemple

Calculer les probabilités des événements suivants :

E : la carte est un cœur ou un roi ;

F : la carte n'est ni un cœur, ni un roi.

$$\begin{aligned} p(E) &= p(B \cup C) \\ &= p(B) + p(C) - p(B \cap C) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} \\ &= \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} \\ &= \frac{11}{32} \end{aligned}$$

$$p(F) = p(\overline{E}) = 1 - p(E) = 1 - \frac{11}{32} = \frac{32}{32} - \frac{11}{32} = \frac{21}{32}$$