Fonctions : étude graphique et variations

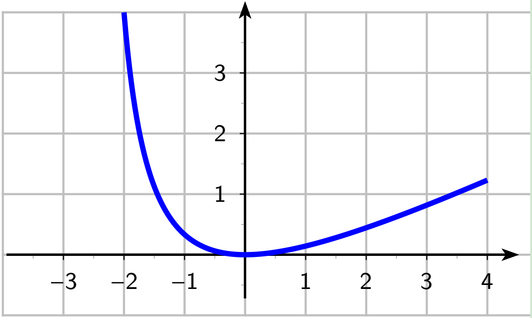
2nde - Programme 2019

I.Courbe représentative d'une fonction
1)Définition

Définition

Dans le plan muni d'un repère, une fonction f définie sur un ensemble de nombre $\mathscr{E}$ est représentée par l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$, appalé **courbe représentative de** f.
Elle est souvent notée $\mathscr{C}_f$.

2) Lecture graphique d'images et d'antécédents



Exemple

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2;4]$.

1. Quelle est l'image de 3 par f ?
2. Par f, quels sont les antécédents de :
   - -1 ?
   - 1 ?
   - 3 ?

Par lecture graphique,

- **l'image de 3** par f est environ 0,8.
- -1 **n'a pas d'antécédent** par f.
- **1 a deux antécédents** par f :
  environ $-1,4$ et 3,4.
- **3 a un unique antécédent** par f :
  environ $-1,9$.

3) Parité d'une fonction

Définition

f est une fonction définie sur un ensemble de nombre $\mathscr{E}$ symétrique par rapport à zéro.

- Si $f(-x) = f(x)$ pour tout x dans $\mathscr{E}$, alors on dit que f est une fonction **paire**.
- Si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x dans $\mathscr{E}$, alors on dit que f est une fonction **impaire**.

Exemples

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$: f est paire car pour tout nombre réel a, on a : $f(-a) = (-a)^2 + 3 = a^2 + 3 = f(a)$.
Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$: g est impaire car
$g(-a) = (-a)^3 = -a \times (-a)^2 = -a^3 = -g(a)$.

Propriété

f est une fonction définie sur un ensemble symétrique par rapport à zéro.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal :

- *f est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe $y = f(x)$.*
- *f est impaire si et seulement si l'origine est un centre de symétrie de la courbe d'équation $y = f(x)$.*

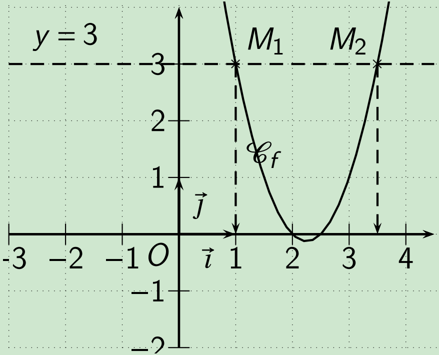
II. Résolutions graphiques
1)Résolution graphique d'équations

Méthode

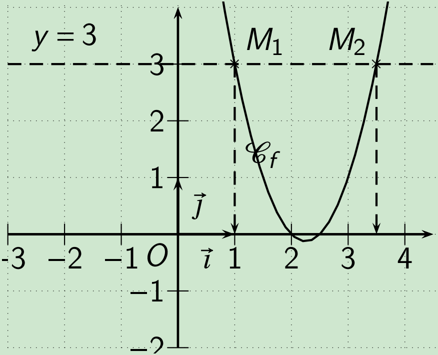
Résoudre l'équation $f(x) = k$ c'est déterminer tous les antécédents éventuels d'un nombre k, c'est-à-dire chercher tous les x de l'ensemble de départ tels que $f(x) = k$.

Exemple

Voici la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 9x + 10$. On recherche les solutions de l'équation $f(x) = 3$.



Exemple



On cherche les points de la courbe ayant pour ordonnée 3. Pour cela on peut tracer la droite d'équation $y = 3$ et chercher les points d'intersection de cette droite avec la courbe de f. On obtient ici deux points $M_1(1;3)$ et $M_2\left(\frac{7}{2};3\right)$.

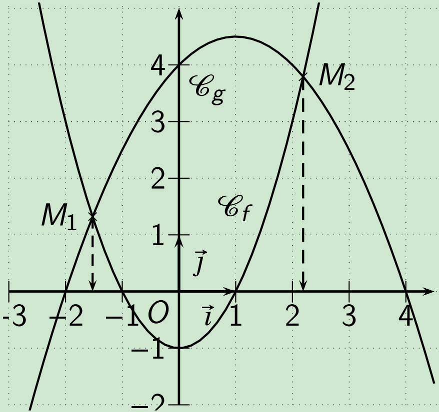
Les solutions sont leurs abscisses : 1 et $\frac{7}{2}$.

Méthode

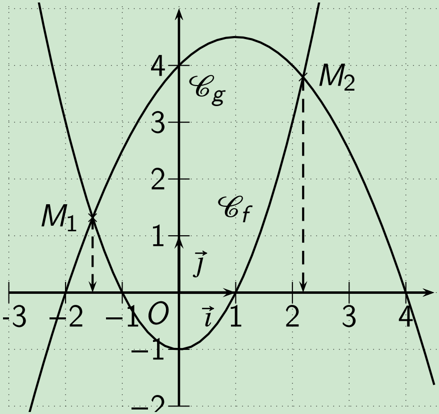
Pour résoudre une équation de la forme $f(x) = g(x)$, on cherche les nombres de l'ensemble de départ qui ont la même image par f et par g : ce sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

Exemple

Voici les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.



Exemple



On cherche les points d'intersection des deux courbes, ici M_1 et M_2, et les solutions de l'équation sont leurs abscisses dont les valeurs approximatives sont $-1,5$ et $2,2$. Les solutions sont donc $x \approx -1,5$ et $x \approx 2,2$.

2)Résolution graphique d'inéquations

Méthode

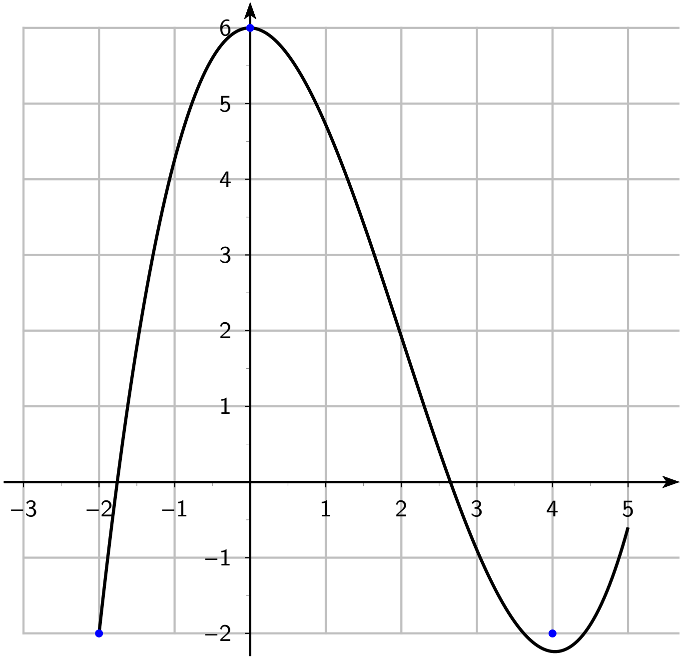
Pour résoudre graphiquement une inéquation de la forme $f(x) \leqslant k$:

- on trace soigneusement $\mathscr{C}_f$ dans un repère (orthogonal) ;
- on trace la droite d'équation $y = k$;
- on recherche les points de la courbe situés **sous** la droite ;
- l'ensemble des solutions est constitué des abscisses de ces points.

Exemple

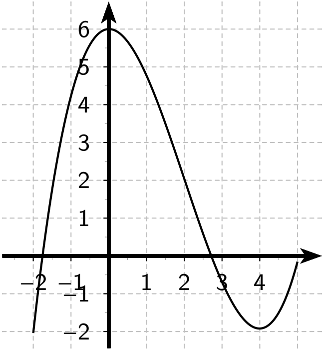
Sur le 1er exemple du 1), si l'on doit résoudre $f(x) \leqslant 3$, après avoir tracé $y = 3$ on constate que les points de la courbe situés sous cette droite ont leurs abscisses comprises entre 1 et $\dfrac{7}{2}$. Donc $f(x) \leqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left[1; \dfrac{7}{2}\right]$.

- On résout de la même manière les équations du type $f(x) \geqslant k$. On retient alors les abscisses des points situés **au-dessus** de la droite d'équation $y = k$. Dans l'exemple $f(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; 1\right] \cup \left[\frac{7}{2}; +\infty\right[$.
- De même pour les inéquations strictes : $f(x) > k$ ou $f(x) < k$. On exclura alors les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite. Dans l'exemple $f(x) < 3 \Leftrightarrow x \in \left]1; \frac{7}{2}\right[$.


6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−2
−1
1
2
3
4
5

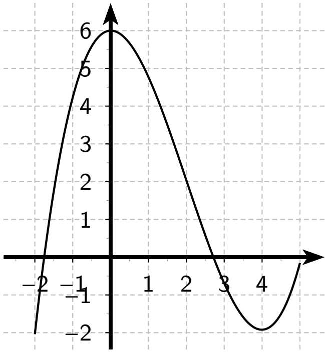
III. Étude des variations d'une fonction
1) Introduction : notions intuitives

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 5]$:

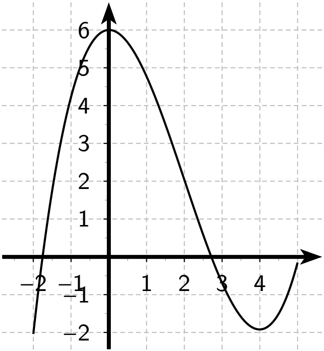


Sens de variation de f

- Sur $[-2; 0]$: la courbe "monte de gauche à droite" sur $[-2; 0]$.
  On dit que f est **croissante** sur $[-2; 0]$.
- Sur $[0; 4]$: la courbe "descend de gauche à droite" sur $[0; 4]$.
  On dit que f est **décroissante** sur $[0; 4]$.



- Maximum de f sur $[-2;5]$:le point de coordonnées $(0;6)$ est "le plus haut" de la courbe sur $[-2;5]$.
  On dit que 6 est le **maximum** de f sur $[-2;5]$;il est atteint en 0.
- Minimum de f sur $[-2;5]$:le point de coordonnées $(4;-2)$ est "le plus bas" de la courbe sur $[-2;5]$.
  On dit que -2 est le **minimum** de f sur $[-2;5]$;il est atteint en 4... et en -2.

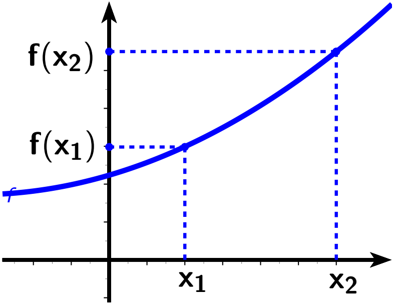


On résume le sens de variation de f dans un **tableau de variation** :

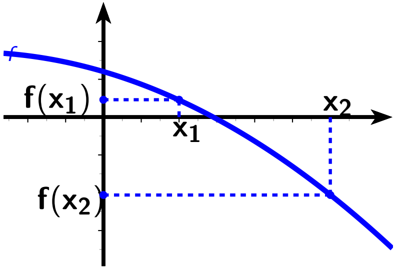
x	-2		0		4		5
$f(x)$	-2	$\nearrow$	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

2) Fonction croissante, décroissante sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.



Dire que f **est croissante sur l'intervalle I** signifie que sur l'intervalle I, si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ augmentent aussi.
Dire que f est croissante sur I signifie que pour tous nombres réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Autrement dit, **une fonction croissante conserve l'ordre.**



Dire que f **est décroissante sur l'intervalle I** signifie que sur l'intervalle I, si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ diminuent.
Dire que f est décroissante sur I signifie que pour tous nombres réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Autrement dit, **une fonction décroissante change l'ordre.**

3) Maximum et minimum d'une fonction sur un intervalle

a désigne un nombre réel de l'intervalle I.

Définition (Maximum)

Dire que $f(a)$ est le maximum de f sur I signifie que pour tout x de I, on a $\mathrm{f}(x) \leq f(a)$.
Graphiquement : le maximum est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe de f.

Définition (Minimum)

Dire que $f(a)$ est le minimum de f sur I signifie que pour tout x de I, on a $f(x) \geq f(a)$.
Graphiquement : le minimum est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe de f.