

Mémento

Algèbre

et

Géométrie

Ce mémento est constitué des définitions et théorèmes les plus importants rencontrés dans les **classes de 6^e et de 5^e**.

Il ne se veut pas exhaustif, mais il doit permettre à tout élève d'y trouver les outils nécessaires à la résolution des exercices qui pourront lui être proposés en classe de 4^e.

1 Vocabulaire

Un calcul contenant plusieurs opérations est appelé :

- Une **somme** si la dernière opération à effectuer est une addition.
- Une **différence** si la dernière opération à effectuer est une soustraction.
- Un **produit** si la dernière opération à effectuer est une multiplication.
- Un **quotient** si la dernière opération à effectuer est une division.

Exemples :

- $3,8 + 7$ est la **somme** de 3,8 et de 7.
Et 3,8 et 7 sont appelés les **termes** de cette somme.
- $9 - 4,8$ est appelé la **différence** de 9 et de 4,8.
Et 9 et 4,8 sont appelés les **termes** de cette différence.
- $3,5 \times 4,2$ est le **produit** de 3,5 par 4,2.
3,5 et 4,2 sont appelés les **facteurs** de ce produit.

DÉFINITION Pour tous les nombres décimaux, a et b différents de zéro, le quotient du nombre a par le nombre b peut s'écrire $\frac{a}{b}$.

$\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a . $\frac{a}{b} \times b = a$.

Le nombre $\frac{12}{5}$ est appelé le **quotient** de 12 par 5.

2 Critères de divisibilité d'un nombre entier

DÉFINITION Dire qu'un nombre entier a est un multiple d'un nombre entier b différent de zéro signifie que le nombre a est le produit du nombre b par un autre entier k . On dit aussi que a est **divisible** par b .

Exemple :

36 est multiple de 12 car $36 = 12 \times 3$.

- Dire qu'un nombre entier est **divisible par 2** signifie aussi que son chiffre des unités est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8 (c'est-à-dire qu'il est pair).
- Dire qu'un nombre entier est **divisible par 4** signifie aussi que le nombre formé par son chiffre des dizaines et son chiffre des unités est divisible par 4.
- Dire qu'un nombre entier est **divisible par 5** signifie aussi que son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Dire qu'un nombre entier est **divisible par 3** signifie aussi que la somme de tous ses chiffres est divisible par 3.
- Dire qu'un nombre entier est **divisible par 9** signifie aussi que la somme de tous ses chiffres est divisible par 9.

3 Enchaînement d'opérations

THÉORÈMES Si dans un calcul, il y a des parenthèses **alors** il faut d'abord effectuer les opérations des parenthèses les plus intérieures.

Si dans un calcul sans parenthèses, il y a les quatre opérations **alors** il faut effectuer toutes les multiplications et toutes les divisions avant les additions et les soustractions.

Si dans un calcul sans parenthèses, il n'y a que des multiplications et des divisions **alors** il faut effectuer les opérations dans le sens de lecture (de gauche à droite).

Si dans un calcul sans parenthèses, il n'y a que des additions et des soustractions **alors** il faut effectuer les opérations dans le sens de lecture (de gauche à droite).

4 Les écritures fractionnaires

DÉFINITION Dans toute écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ avec b différent de zéro, le nombre a désigne le **numérateur** et b désigne le **dénominateur**.

Une écriture fractionnaire peut être l'écriture :

- d'un nombre entier, par exemple : $\frac{15}{3}$;
- d'un nombre décimal, par exemple : $\frac{4}{5}$;
- d'un nombre qui n'est pas un décimal, par exemple : $\frac{5}{3}$.

Opérations avec des écritures fractionnaires

THÉORÈMES Pour tous les nombres décimaux a , b et c différents de zéro,

on a :

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

THÉORÈMES Pour tous les nombres décimaux a , b , c et d différents de zéro,

on a :

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{d}$$

$$\frac{a}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a - c}{d}$$

$$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$$

5 Les nombres relatifs

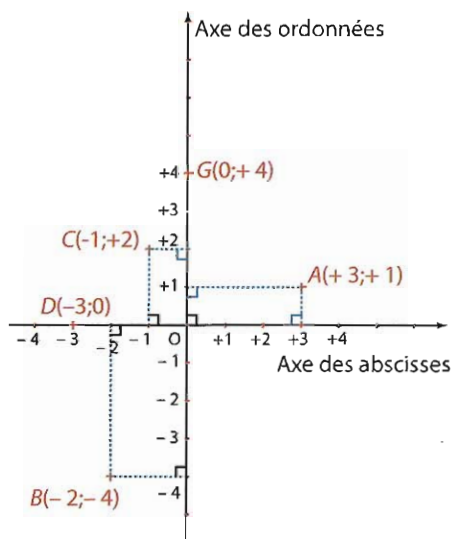
DÉFINITION Un **nombre relatif** est formé d'un signe $+$ ou $-$ et d'un nombre appelé **distance à zéro**. S'il a un signe $+$ alors il est dit positif. S'il a un signe $-$ alors il est dit négatif.

Repérage

DÉFINITION Sur une droite graduée chaque point est repéré par un nombre relatif. On dit que ce nombre est l'**abscisse** de ce point.

DÉFINITION Dans un repère du plan, la position d'un point est donnée par un couple de nombres relatifs appelé les **coordonnées** du point. Le premier nombre est appelé l'**abscisse du point** et le second nombre est appelé l'**ordonnée du point**.

Exemple :



$(+3)$ est l'abscisse de A et $(+1)$ est l'ordonnée de A.

On dit que A a pour coordonnées $(+3; +1)$ et on note $A(+3; +1)$.

Comparer, ajouter et soustraire des nombres relatifs

THÉORÈMES

- De deux nombres négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite distance à zéro
- De deux nombres de signes contraires, le plus grand est le nombre positif.
- De deux nombres positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande distance à zéro.

THÉORÈME Si deux nombres relatifs sont de même signe **alors** leur somme a aussi le même signe et a pour distance à zéro la somme des distances à zéro des deux nombres.

THÉORÈME Si deux nombres relatifs sont de signes contraires **alors** leur somme a le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro et a pour distance à zéro la différence des distances à zéro des deux nombres.

Exemples :

$$(-2) + (+5) = (+3) \text{ et } (+3) + (-8) = (-5).$$

DÉFINITION Dire que deux nombres relatifs sont **opposés** signifie que leur somme est égale à zéro.

THÉORÈME Soustraire un nombre c'est ajouter son opposé.

Exemples :

$$(-5) - (-8) = (-5) + (+8) = (+3) \text{ et } (-5) - (+3,5) = (-5) + (-3,5) = (-8,5).$$

6 Les expressions littérales

DÉFINITION Une **expression littérale** est une expression contenant des lettres. Elle peut servir à écrire une formule ou encore traduire l'énoncé d'un problème.

CONVENTION On peut supprimer le signe $\times$ entre deux lettres, entre un nombre et une lettre ou encore devant une parenthèse. Ainsi :

$$a \times b = ab, \quad 3 \times x = 3x, \quad 5 \times (2 + x) = 5(2 + x).$$

7 La proportionnalité

DÉFINITION Dire que deux **grandeurs** sont **proportionnelles** signifie que l'on peut calculer l'une à partir de l'autre en multipliant toujours par le même nombre appelé **le coefficient de proportionnalité**.

DÉFINITION Dire qu'un tableau à deux lignes est un tableau de proportionnalité signifie que les valeurs de l'une des lignes s'obtiennent en multipliant **toujours par le même nombre** les valeurs correspondantes de l'autre ligne. Ce nombre s'appelle le coefficient de proportionnalité.

$\times \frac{5}{2}$	5	7	4,5	$\times \frac{2}{5}$
	2	2,8	1,8	

DÉFINITION Un **pourcentage** est un coefficient de proportionnalité de dénominateur 100.

DÉFINITIONS • Dire qu'une reproduction d'un objet est une **représentation à « l'échelle »** de cet objet signifie qu'il y a proportionnalité entre les longueurs de l'objet et celles de la reproduction.

• On appelle **échelle** le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des longueurs de l'objet aux longueurs de la reproduction, exprimées dans la même unité.

La reproduction est **une réduction** lorsque l'échelle est inférieure à 1.

La reproduction est **un agrandissement** lorsque l'échelle est supérieure à 1.

8 Exploitations de données

Lorsque l'on mène une enquête, on s'intéresse à une **population** d'individus (*élèves d'une classe, pays de l'Union Européenne, animaux d'une région, ...*) et on en étudie une propriété commune appelée un **caractère** (*taille des élèves d'une classe, langue officielle des pays de l'Union Européenne, régime alimentaire des animaux d'une région, ...*).

Un caractère peut prendre plusieurs **valeurs**. *Herbivore, carnivore, ...* sont des valeurs possibles du caractère « Régime alimentaire » de la population « Animaux d'une région ».

Un caractère peut être :

- **quantitatif** : *taille des élèves d'une classe ; poids des joueurs d'une équipe de rugby ; nombre de frères et sœurs des élèves d'une classe ; ...*
- **qualitatif** : *le sport préféré par les élèves d'une classe ; langue officielle des pays de l'Union Européenne ; ...*

DÉFINITIONS

• Pour un caractère donné, on appelle **effectif** d'une valeur le nombre de fois où cette valeur apparaît.

• Le nombre d'individus de la population étudiée est appelé **l'effectif total**.

• Pour un caractère donné, on appelle **fréquence** d'une valeur le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total. C'est donc la proportion de cette valeur par rapport à l'effectif total.

THÉORÈMES

• Pour une population et un caractère donnés, la fréquence d'une valeur est un nombre qui peut être 0 ; 1 ou tous les nombres compris entre 0 et 1.

• Pour une population et un caractère donnés, la somme des fréquences est toujours égale à 1.

1 À propos du codage

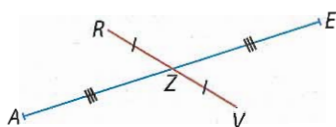
Une observation faite sur un dessin est une **conjecture**.

Une observation ou des mesures effectuées avec un instrument sur un dessin ne sont **jamais des preuves**.

Des informations sont sûres si elles sont écrites dans l'énoncé ou codées sur un dessin donné dans l'énoncé.

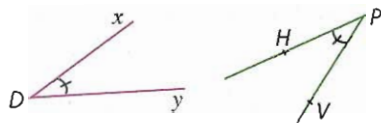
Le codage sert à marquer sur un dessin uniquement les données qui sont sûres. Pour cela, il faut connaître et utiliser certains codages :

- Longueurs égales :



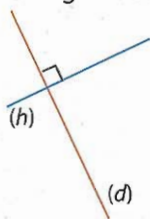
On est sûr que :
 $AZ = ZE$ et $RZ = ZV$

- Codage des angles égaux :



On est sûr que : $\widehat{xDy} = \widehat{HPV}$

- Codage de deux droites perpendiculaires :



On est sûr que : $(h) \perp (d)$

2 Droites et segments

DÉFINITIONS • Deux droites sont **sécantes** quand elles se coupent en un seul point sinon elles sont **parallèles**.

• Deux droites **perpendiculaires** sont définies comme deux droites sécantes déterminant quatre angles égaux (qui sont des angles droits).

THÉORÈME Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite **alors** elles sont parallèles entre elles.

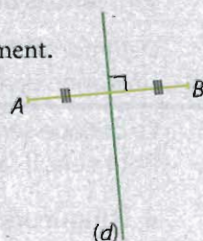
DÉFINITION Le milieu d'un segment est le point qui appartient à ce segment qui est à égale distance de ses extrémités.

Exemple :

I est le milieu du segment $[EN]$ donc I, N et E sont 3 points alignés et $IN = IE = \frac{NE}{2}$.



DÉFINITION La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et qui passe par le milieu du segment.



THÉORÈMES • Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est à égale distance des extrémités de ce segment.

• Si un point est à égale distance des extrémités d'un segment alors il appartient à la médiatrice de ce segment.

3 Les angles

Le dessin suivant représente l'angle $\widehat{xAy}$:



DÉFINITION La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles égaux.

DÉFINITIONS • Dire que deux angles sont complémentaires signifie que leur somme est égale à 90° .

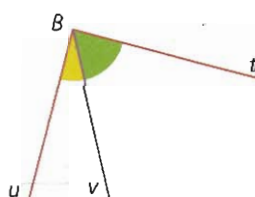
• Dire que deux angles sont supplémentaires signifie que leur somme est égale à 180° .

DÉFINITION Dire que deux angles sont adjacents signifie que :

- ils ont le même sommet et un côté commun ;
- ils sont de part et d'autre de ce côté commun.

Exemple :

Les angles $\widehat{uBv}$ et $\widehat{vBt}$ sont adjacents.



DÉFINITION Dire que deux angles sont **opposés par le sommet** signifie que ces deux angles sont symétriques par rapport à leur sommet.

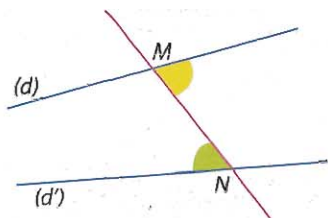
THÉORÈME Si deux angles sont opposés par le sommet **alors** ils sont égaux.

DÉFINITION Soient deux droites (d) et (d') coupées par une sécante, dire que deux angles sont **alternes-internes** signifie que :

- ils n'ont pas le même sommet ;
- ils sont de part et d'autre de la sécante ;
- ils sont à l'intérieur de la bande délimitée par les droites (d) et (d') .

Exemple :

Les deux angles vert et jaune formés par les droites (d) et (d') coupées par la sécante (MN) sont alternes-internes.

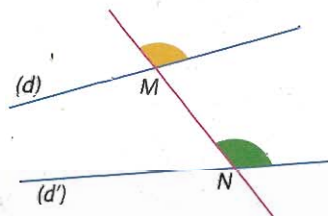


DÉFINITION Soient deux droites (d) et (d') coupées par une sécante, dire que deux angles sont **correspondants** signifie que :

- ils n'ont pas le même sommet ;
- ils sont du même côté de la sécante ;
- l'un est à l'intérieur de la bande délimitée par les droites (d) et (d') , l'autre est à l'extérieur.

Exemple :

Les deux angles orange et vert formés par les droites (d) et (d') coupées par la sécante (MN) sont correspondants.



THÉORÈMES • Si deux angles alternes internes sont formés par deux droites parallèles coupées par une sécante **alors** ces deux angles sont égaux.

• Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes internes égaux **alors** ces droites sont parallèles.

4 Les triangles

Propriétés du triangle

THÉORÈME Si une figure est un triangle alors la somme de ses trois angles est égale à 180° .

THÉORÈME Si une figure est un triangle alors la longueur de chaque côté est toujours inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

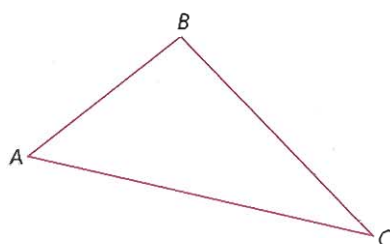
Exemple :

ABC est un triangle

$AB < AC + CB$

$AC < AB + BC$

$BC < BA + AC$



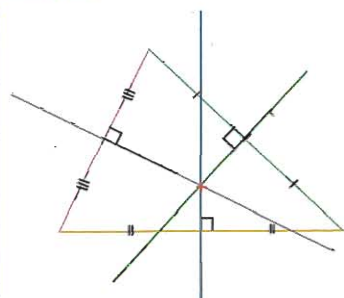
THÉORÈMES • Si trois points A , B et C sont tels que $BA + AC = BC$ alors A appartient au segment $[BC]$.

• Si le point A appartient au segment $[BC]$ alors $BC = BA + AC$.

Droites particulières dans un triangle

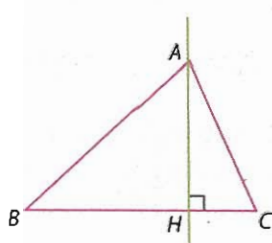
THÉORÈME Les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un même point, on dit qu'elles sont concourantes.

Exemple :

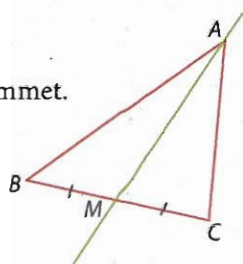


THÉORÈME Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection des trois médiatrices. Il est à égale distance des trois sommets du triangle.

DÉFINITIONS • Une **hauteur** d'un triangle est une droite qui est perpendiculaire à un côté et qui passe par le sommet opposé à ce côté.



• Une **médiane** d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui passe par le milieu du côté opposé à ce sommet.



■ Triangles particuliers

DÉFINITION Dire qu'un triangle est **isocèle** signifie que ce triangle a deux côtés de même longueur.

THÉORÈMES • Si un triangle est isocèle alors les deux angles à la base sont égaux.

• Si un triangle a deux angles égaux alors ce triangle est isocèle et le troisième angle a pour sommet, le sommet principal.

• Si un triangle est isocèle alors la médiane, la hauteur et la bissectrice issues du sommet principal et la médiatrice relative à la base désignent la même droite.

DÉFINITION Dire qu'un triangle est **équilatéral** signifie que ce triangle a ses trois côtés de même longueur.

THÉORÈMES • Si un triangle est équilatéral alors ses trois angles sont égaux à 60° .

• Si un triangle a trois angles égaux alors ce triangle est équilatéral.

• Si un triangle est équilatéral alors la médiane, la hauteur et la bissectrice issue d'un même sommet et la médiatrice du côté opposé désignent la même droite.

DÉFINITION Dire qu'un triangle est **rectangle** signifie que ce triangle a deux côtés perpendiculaires.

5 Les parallélogrammes

Propriétés des parallélogrammes

DÉFINITION Dire qu'un quadrilatère est un **parallélogramme** signifie que ce quadrilatère a ses côtés opposés parallèles.

THÉORÈMES ● Si un quadrilatère est un parallélogramme **alors** ses côtés opposés sont parallèles.

● Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles **alors** ce quadrilatère est un parallélogramme.

● Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu **alors** ce quadrilatère est un parallélogramme.

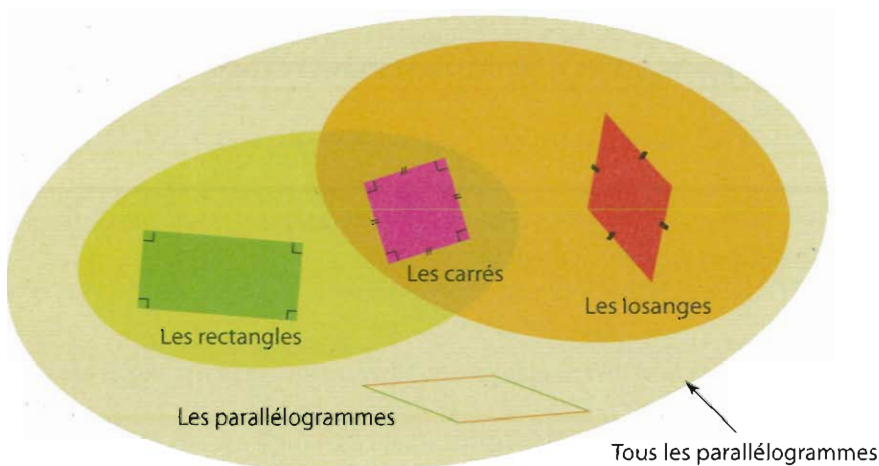
● Si un quadrilatère est un parallélogramme **alors** ses diagonales se coupent en leur milieu.

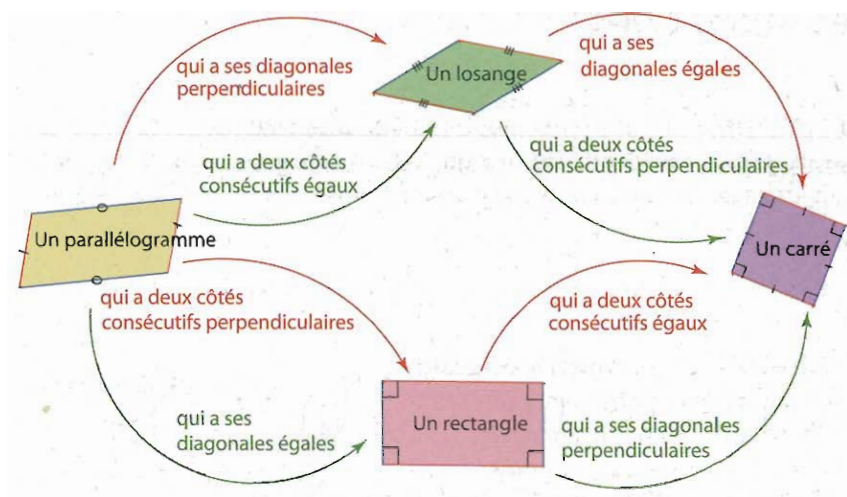
THÉORÈMES ● Si un quadrilatère est un parallélogramme **alors** ses côtés opposés sont de même longueur.

● Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de la même longueur **alors** ce quadrilatère est un parallélogramme.

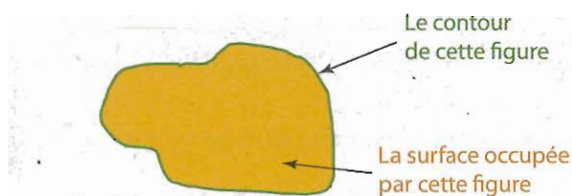
● Si un quadrilatère est un parallélogramme **alors** ses angles opposés sont égaux.

Les différents parallélogrammes





6 Aire et périmètre d'une figure



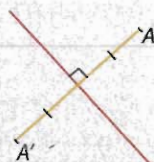
- DÉFINITIONS**
- Le **périmètre** d'une figure, c'est la longueur du contour de la figure.
 - L'**aire** d'une figure permet de mesurer la place occupée par la figure.

Le tableau suivant donne les aires des figures usuelles.

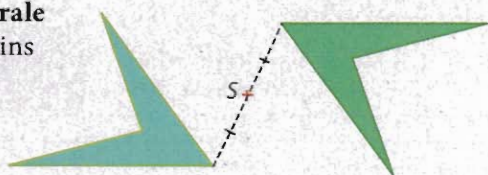
Rectangle	Carré	Triangle rectangle
$A = a \times b$	$A = c \times c$	$A = \frac{a \times b}{2}$
Parallélogramme	Triangle	Cercle
$A = c \times h$	$A = \frac{c \times h}{2}$	$A = \pi \times r^2$

7 Les symétries

DÉFINITION Dire que deux points sont **symétriques par rapport à une droite** signifie que cette droite est la médiatrice du segment formé par ces deux points.



DÉFINITION Par **symétrie centrale par rapport à un point**, deux dessins symétriques se superposent après un demi-tour autour de ce point. On appelle ce point le **centre de symétrie**.



Propriétés de la symétrie centrale

THÉORÈMES ● Si trois points sont alignés **alors** leurs symétriques par rapport à un point sont alignés.

● Si deux droites sont symétriques par rapport à un point **alors** elles sont parallèles.

● Si deux segments sont symétriques par rapport à un point **alors** ils ont la même longueur.

● Si deux demi-droites sont symétriques par rapport à un point **alors** elles sont parallèles et de sens contraires.

● Si deux angles sont symétriques par rapport à un point **alors** ils sont égaux.

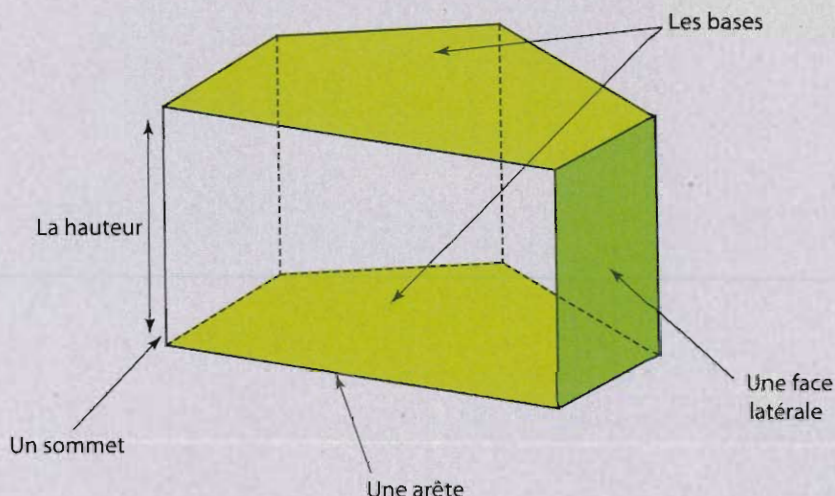
● Si deux cercles sont symétriques par symétrie centrale **alors** ils ont le même rayon et leurs centres sont symétriques par rapport au centre de la symétrie centrale.

DÉFINITION Un point est **centre de symétrie d'une figure** si, par symétrie centrale autour de ce point, cette figure et son symétrique sont confondus.

8 Dans l'espace

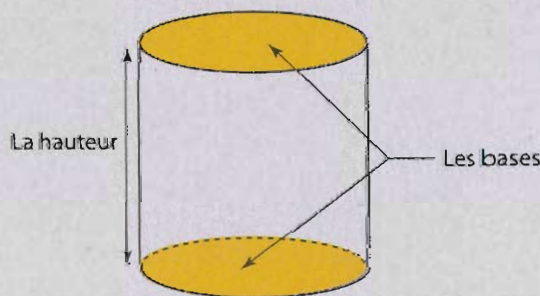
Le prisme droit

- DÉFINITION** Un **prisme droit** est un solide qui possède :
- deux bases polygonales (triangle, quadrilatère, pentagone, ...) parallèles et superposables ;
 - des faces latérales rectangulaires perpendiculaires aux bases.



Le cylindre de révolution

- DÉFINITION** Un **cylindre de révolution** est un solide obtenu par une rotation complète d'un rectangle autour de l'un de ses côtés.
- Un cylindre de révolution possède :
- deux bases : des disques parallèles et superposables ;
 - une surface latérale rectangulaire.



THÉORÈME Volume d'un prisme droit et d'un cylindre de révolution :

$$\text{Volume} = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$$

(toutes les longueurs étant exprimées dans la même unité).

Collection
Babylone